Übungen zur Vorlesung

Elektrodynamik (T3p)

SoSe 2013

Blatt 3

Aufgabe 1: Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(\mathbf{k})$ einer Funktion $f(\mathbf{x})$ ist definiert durch

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}\ f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{1}$$

Die inverse Fourier-Transformation lautet dann

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\ \tilde{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{2}$$

Die Funktion $f(\mathbf{x})$ erfülle im Folgenden die notwendigen mathematischen Voraussetzungen, so dass die Fourier-Transformierte existiert (was in der Physik praktisch immer der Fall ist). Nehmen Sie insbesondere an, dass $f(\mathbf{x})$ im Unendlichen verschwinde.

1. Zeigen Sie, dass die Delta-Distribution in der folgenden Form dargestellt werden kann

$$\delta^3(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{3}$$

   Hinweis: Fügen Sie im Exponenten einen Dämpfungsterm der Form $-\epsilon(|k_x| + |k_y| + |k_z|)$ mit $\epsilon > 0$ hinzu, so dass der Integrand im Unendlichen verschwindet. Betrachten Sie erst nach der Berechnung des Integrals den Grenzwert für $\epsilon \to 0^+$. Bei der Berechnung empfiehlt es sich wie folgt vorzugehen: Benutzen Sie die Eigenschaft welche die Delta-Funktion erfüllen muss nämlich $\int d^3x'\delta(\vec{x}')f(\vec{x}') = f(\vec{0})$ und lösen Sie das Integral mit obigem Dämpfungsterm. Für die Rechung können Sie die Chauchy-Integral Formel benutzen

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int dz \frac{f(z)}{z - z_0} \tag{4}$$

2. Zeigen Sie, dass die angegebene Form der inversen Fourier-Transformation mit der Definition der ursprünglichen Fourier-Transformation konsistent ist, d.h. berechnen Sie explizit die inverse Fourier-Transformation der Fourier-Transformierten von $f(\mathbf{x})$.

3. Zeigen Sie die Parsevalsche Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x} f^*(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\tilde{f}^*(\mathbf{k})\tilde{g}(\mathbf{k}). \tag{5}$$

4. Zeigen Sie, daß die Fourier-Transformation Ableitungen in einfache Produkte verwandelt, d.h. berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $\partial_i f(\mathbf{x})$.

5. Die Faltung zweier Funktionen $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$ ist definiert durch

$$h(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x}' f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')g(\mathbf{x}'). \tag{6}$$

   Zeigen Sie das Faltungstheorem $\tilde{h}(\mathbf{k}) = \tilde{f}(\mathbf{k})\tilde{g}(\mathbf{k})$.

6. Skizzieren Sie die Funktion $f(\mathbf{x}) = \exp(-(1/2)a^2\mathbf{x}^2)$ als Funktion von x für konstantes y und z, berechnen Sie ihre Fourier-Transformierte und skizzieren Sie diese ebenfalls. Wie läßt sich das Resultat allgemein charakterisieren?

Aufgabe 2: Wellengleichungen

Gegeben sind die Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = 0 \tag{8}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{t})}{\partial t} \tag{9}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{t})}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

Leiten Sie direkt aus den freien Maxwell-Gleichungen (d.h.$\rho(x) = 0, \mathbf{j}(x) = 0$ in (**??**)-(**??**)) die Wellengleichungen für das **E**-und **B**-Feld her.

Aufgabe 3: Raum-und Zeitspiegelung

a) Zeigen Sie, dass die Maxwellgleichungen (**??**) - (**??**) invariant unter Zeitspiegelung $t \to -t$ sind. D.h. falls die Felder $E(\mathbf{r}, t), B(\mathbf{r}, t), \rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ die Maxwellgleichungen erfüllen, so müssen diese auch für die zeitgespiegelten Felder $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t'), \mathbf{B}'(\mathbf{r}, t'), \rho'(\mathbf{r}, t')$ und $\mathbf{j}'(\mathbf{r}, t')$ gelten.
(*Hinweis:* Es ist $\rho'(\mathbf{r}, t') = \rho(\mathbf{r}, t)$. Überlegen Sie, wie sich dann $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ unter Zeitspiegelung verhält. Aus den Maxwellgleichungen folgt dann das Transformationsverhalten der Felder.)

b) Zeigen Sie nun auch die Invarianz der Maxwell-Gleichungen unter Paritätstransformation $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$.

Bei Fragen E-Mail an: *Daniel.Jaud@physik.uni-muenchen.de*