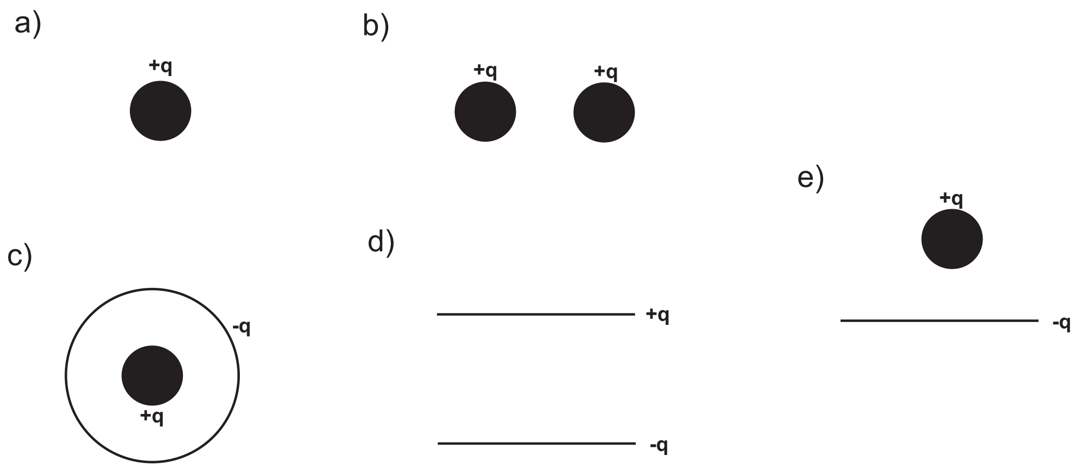
Übungsblatt 2

Besprechung am 15.05.2017

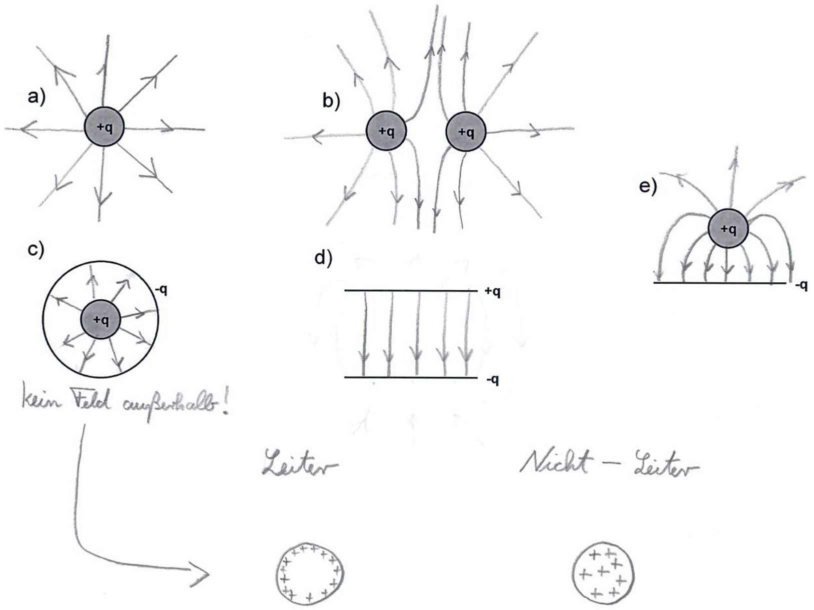
In diesem Blatt behandeln wir elektrische Feld, Kräfte in elektrischen Feldern und den Satz von Gauß.

Aufgabe 1

Elektrische Feldlinien: Zeichnen Sie zu den folgenden Konfigurationen die Feldlinien des elektrischen Feldes. Gehen sie davon aus, dass die Ladung in allen Fällen gleichmäßig für den Objekten verteilt ist. Erläutern Sie am Beispiel c) qualitativ, welchen Einfluss die Leitfähigkeit (leitfähig vs nicht leitfähig) der Kugel auf die Ladunsverteilung hätte.



Lösung



Aufgabe 2

Satz von Gauß: Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes das elektrische Feld $\vec{E}$ innerhalb und außerhalb einer geladenen Hohlkugel und einer geladenen Vollkugel. Nehmen Sie an, dass die Kugeln den Radius R und die Gesamtladung Q besitzen, wobei die Ladung gleichmäßig auf der Kugelschale bzw. im Kugelvolumen verteilt ist. Tipp: Unterscheiden Sie zwischen dem Feld $E(r)$ für $r \leq R$ und $r > R$.

Lösung: Für die Anwendung des Satzes von Gauß wählen wir eine Kugelschale mit dem Radius r. Der Satz von Gauß hat dann folgende Form, die durch die Kugelsymmetrie weiter vereinfach werden kann.

$$\Phi = \oint_A \vec{E}(r) d\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) \oint_A dA = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

Hier bezeichnet das Integral auf der linke Seite lediglich die Oberfläche $4\pi r^2$ der Gaußschen Kugelschale. Betrachten wir zunächst den Fall $r > R$. Die eingeschlossenen Ladung ist sowohl für die Hohlkugel als auch für die Vollkugel gleich der Gesamtladung Q, also $Q_{\text{innen}} = Q$.

$$E \oint_A dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r)\ 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Durch Umstellen ergibt sich:

$$E(r) = \frac{Q}{4\epsilon_0 \pi r^2} \qquad \text{für } r > R$$

Nun betrachten wir die Hohlkugel für $r \leq R$. Da innerhalb einer Gaußfläche in der Hohlkugel keine Ladungen sind, ist $Q_{innen} = 0$. Daraus ergibt sich sofort:

$$E(r) = 0 \qquad \text{für } r \leq R$$

Für die Vollkugel hängt die Ladung Q_{innen}, die innerhalb der Gaußfläche ist, vom Radius r der Gaußfläche ab. Es gilt

$$Q_{\text{innen}} = Q\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Dann ergibt sich mit der Rechnung von oben

$$E\oint_A dA = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r)\ 4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3}$$

Und damit

$$E(r) = \frac{Qr}{4\epsilon_0 \pi R^3} \qquad \text{für } r \leq R$$

Aufgabe 3

Millikan Versuch: Der Millikan-Versuch ermöglichte es bereits 1910, die Größe der Elementarladung e relativ genau zu ermitteln. Dabei geht am wie folgt vor: Zunächst wird Öl zu kleinen Öltröpfchen zerstäubt und in einen Plattenkondensator gebracht. Durch Reibung z.B. beim Zerstäuben werden die Öltröpfchen zusätzlich aufgeladen. Im feldfreien Fall erreichen die Öltröpfchen eine definierte Sinkgeschwindigkeit (durch die Gravitation) die dazu benutzt werden kann, Tröpfengröße und Masse zu errechnen. Daraufhin wird eine Spannung an den Plattenkondensator angelegt und so eingestellt, dass das Öltröpfchen in Ruhe schwebt und somit die Gewichtskraft des Öltröpfchen gerade durch die elektrische Kraft ausgeglichen wird. Aus dieser Spannung kann dann die Ladung errechnet werden. Dies wollen wir im Folgenden nachvollziehen. Gehen Sie davon aus, dass der Plattenkondensator einen Abstand von $d = 1$ cm hat. Das Feld eines Plattenkondesators kann mit der angelegten Spannung U über die Formel $E = \frac{U}{d}$ in Zusammenhang gebracht werden.

a) Im feldfreien Zustand ($U = 0\,V$) sinkt ein kugelförmiges Tröpfchen mit dem Radius r mit konstanter Geschwindigkeit v nach unten, sobald nach einer vernachlässigbaren Beschleunigungsphase die Gewichtskraft durch die Auftriebskraft (aufgrund der Verdrängung von Luft) und durch die Reibungskraft (Stokessches Gesetz) kompensiert wird. Die Sinkgeschwindigkeit des Tröpfchens sei $v = 5 \cdot 10^{-5}$ m/s. Berechnen Sie mithilfe der Viskosität der Luft $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ kg/(m s), der Dichte der Luft $\rho_{\text{Luft}} = 1,2$ kg/m^3, sowie der Dichte des Öls $\rho_{\text{Öl}} = 0,91$ g/cm^3 den Radius r und die Masse m des Tröpfchens.

   Lösung: Die Gewichtskraft F_G, die Auftriebskraft F_A und die Reibungskraft F_R sind durch folgende Gleichungen gegeben:

$$F_G = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{Öl} g \qquad F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{Luft} g \qquad F_R = 6\pi\eta r v$$

Nach der Beschleunigungsphase ergibt sich eine konstante Geschwindigkeit, die durch das Kräftegleichgewicht dieser Kräfte gegeben ist:

$$F_R = F_G - F_A \qquad \Longrightarrow \qquad 6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\ddot{O}l} - \rho_{Luft})g$$

Einsetzen ergibt dann:

$$r = \sqrt{\frac{9v\eta}{2(\rho_{\ddot{O}l} - \rho_{Luft})g}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}\frac{m}{s} \cdot 1.8 \cdot 10^{-5}\frac{kg}{m \cdot s}}{2(0.91 \cdot 10^3 - 1.2)\frac{kg}{m^3} \cdot 9.81\frac{m}{s^2}}} = 6.74 \cdot 10^{-7} m$$

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\ddot{O}l} = 1.17 \cdot 10^{-15} kg$$

b) Nun wird die Stärke des elektrischen Feldes über die Kondensatorspannung so lange variiert, bis das Öltröpfchen regungslos schwebt. Dies stellt man bei einer Spannung von $U = 3.57$ kV fest. Welche Ladung hat das Öltröpfchen? Im welchem Zusammenhang steht diese Ladung zur Elementarladung $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C?

Lösung: Zum Kräftgleichgewicht kommt nun auch noch die elektrische Kraft hinzu. Im Gleichgewichtsfall ist $v = 0$ und damit auch $F_R = 0$:

$$F_G = F_A + F_R + F_E \qquad \Rightarrow \qquad F_E = F_G - F_A$$

Die Kräfte lassen sich wie folgt darstellen:

$$F_G - F_A = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\ddot{O}l} - \rho_{Luft})g \qquad F_E = E \cdot q = \frac{U}{d}q$$

Daraus ergibt sich für $U = 3.57$ kV:

$$q = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\ddot{O}l} - \rho_{Luft})g}{U} d = 3.2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Das entspricht genau der doppelten Elementarladung

c) Erläutern Sie, wie man durch Wiederholung dieses Vorgehens die Elementarladung bestimmen kann!

Lösung: Wenn dieses Vorgehen für weitere Tröpfchen durchgeführt wird, wird man immer ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung errechnen. Aus vielen Messungen kann dann auf die Elementarladung rückgeschlossen werden