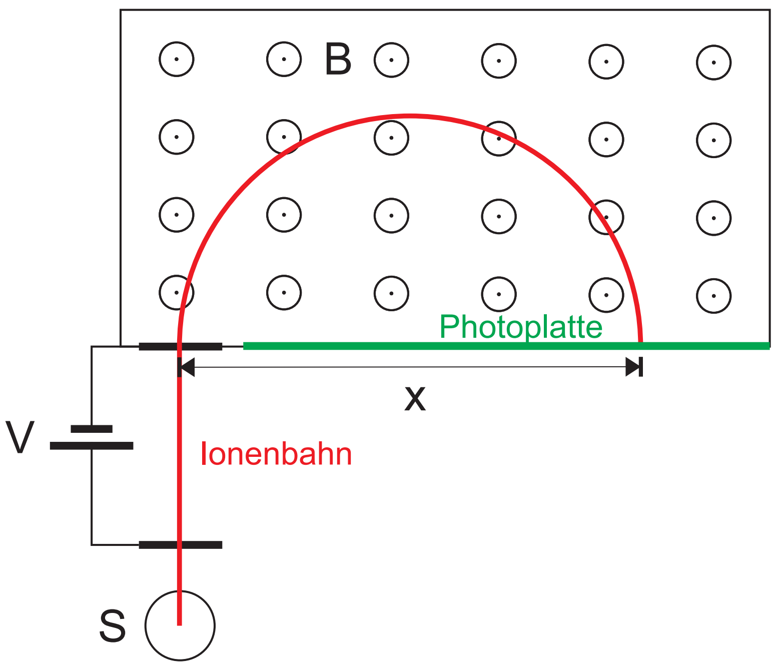
# Übungsblatt 6

## Besprechung am 19.06.2017

### Aufgabe 1

**Massenspektrometer.** Ein Massenspektrometer ist in der Lage, mithilfe von eletrischen und magnetischen Feldern die Massen von Ionen zu bestimmen. Der Aufbau eines Massenspektrometers ist schematisch in der Abbildung unten skizziert. Zunächst werden die Ionen in einer Ionenquelle $S$ erzeugt und in einem elektrischen Feld beschleunigt. Danach tritt der Ionenstrahl in ein magnetisches Feld, das senkrecht zu Bewegungsrichtung der Ionen steht, ein. In diesem Feld werden die Ionen aufgrund der Lorentz-Kraft $F_\mathrm{L}$ auf eine halbkreisförmige Bahnkurve abgelenkt. Dort treffen sie im Abstand $x$ auf eine Fotoplatte auf. Dieser Abstand $x$ ermöglich es, auf die Ionenmasse rückzuschließen (bei bekannter Ladung).




a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Geschwindigkeit $v$ her, die Ionen der Masse $m$ und Ladung $q$ beim Durchlaufen der Beschleunigungsspannung $V$ erreichen.

b) Leiten Sie einen Ausdruck für den Radius des Halbkreises her, den Ionen der Masse $m$ und der Geschwindigkeit aus Teilaufgabe a) in einem magnetischen Feld beschreiben würden (Siehe Abbildung).

c) In einem Experiment soll nun die Masse von unbekannten Ionen bestimmt werden. Die Ionen haben eine Ladung von $q = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ und werden mit $U = 1200\,\mathrm{V}$ beschleunigt. Das magnetischen Feld sei $B = 50\,\mathrm{mT}$ und die Entfernung vom Eintrittsspalt, in der die Ionen auf die Fotoplatte treffen, sei $x = 1{,}248\,\mathrm{m}$. Welche Masse haben die Ionen? Um welche Ionen könnte es sich handeln?

**Lösung**

a) Die kinetischen Energie der Ionen muss gleich der potentiellen Energie beim Durchlaufen des elektrischen Feldes sein.

$$E_{\mathrm{kin}} = E_{\mathrm{pot}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}mv^2 = qV$$

Die Geschwindigkeit ist also

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

b) Für die Kreisbewegung der Ionen gilt, dass Lorentz-Kraft $F_{\mathrm{L}}$ und Zentripetalkraft $F_{\mathrm{Z}}$ gleich sein müssen.

$$F_{\mathrm{L}} = F_{\mathrm{Z}} \qquad \Longrightarrow \qquad qvB = \frac{mv^2}{r}$$

Durch Umformen ergibt sich der Radius

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

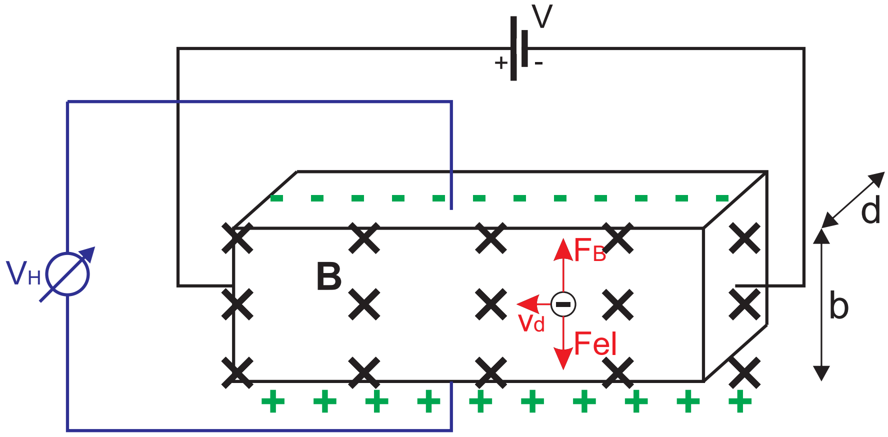
c) Die Strecke $x$ entspricht dem doppelten Radius $x = 2r$. Die Gleichung in b) kann damit nach $m$ aufgelöst werden und die Werte eingesetzt werden.

$$m = \frac{B^2x^2q}{8V} = 6{,}49 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg} = 39{,}098\,\mathrm{u}$$

Die Ionenmasse entspricht der von Kalium-Ionen.

## Aufgabe 2

**Hall-Effekt.** Ladungsträger, die in einem Leiter durch ein senkrecht anliegendes Magnetfeld fließen, erfahren eine magnetische Kraft $F_{\mathrm{B}}$ senkrecht zu Bewegungsrichtung (siehe Abbildung). Die Ladungsträger werden also an eine Seite des Leiters geschoben und es kommt zur Ladungstrennung. Die Ladungen bewegen sich so lange zu einer Seite des Leiters, bis die magnetische Kraft $F_{\mathrm{B}}$ auf die Ladungsträger gerade durch die elektrische Kraft $F_{\mathrm{el}}$, die durch die Ladungstrennung ausgeübt wird, kompensiert wird. Diesen Effekt nennt man Hall-Effekt. Die Ladungstrennung im Gleichgewichtsfall lässt sich als sogenannte Hall-Spannung $V_{\mathrm{H}}$ zwischen den beiden Leiterseiten messen. Sie lässt Rückschlüsse auf die Ladung der Ladungsträger und die Ladungsträgerdichte zu.




a) Leiten sie mithilfe des Kräftegleichgewichts zwischen elektrischer und magnetischer Kraft einen Ausdruck für die Hall-Spannung in Abhängigkeit von der Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger $v_\mathrm{d}$ her.
**Hinweis:** Das elektrische Feld, das durch die Ladungstrennung verursacht wird, kann mit dem Feld eines Kondensators mit Plattenabstand $b$ beschrieben werden. Die Hall-Spannung entspricht dabei der Spannung zwischen den Kondensatorplatten.

b) Wie hängt die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger mit der Ladungsträgerdichte zusammen? Nehmen Sie an, dass der Leiter vom Strom $I$ durchflossen wird und, wie in der Skizze, die Dicke $d$ und Breite $b$ hat.

c) Durch eine Silberplatte mit den Maßen $d = 1\,\mathrm{mm}$ und $b = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ fließt ein Strom von $I = 2{,}5\,\mathrm{A}$. Bei einem Magnetfeld von $B = 2{,}5\,\mathrm{T}$ wird eine Hallspannung von $U_\mathrm{H} = 0{,}668\,\mu\mathrm{V}$ gemessen. Stellen Sie zunächst mit a) und b) einen Zusammenhang zwischen Hallspannung und Ladungsträgerdichte her. Wie groß ist die Ladungsträgerdichte in der Silberplatte?

d) Vergleichen sie die Ladungsträgerdichte mit der Anzahldichte der Silberatome in der Platte. Silber hat eine Dichte von $\rho = 10{,}5\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ und eine molare Masse von $m_\mathrm{mol} = 107{,}9\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$.

**Lösung**

a) Im Gleichgewichtsfall heben sich elektrische und magnetische Kraft auf die Ladungsträger gerade auf. Es gilt also:

$$F_\mathrm{L} = F_\mathrm{el} + F_\mathrm{mag} = q\left(\vec{E} + \vec{v}_\mathrm{d} \times \vec{B}\right) = q\,(E - v_\mathrm{d}B) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E = v_\mathrm{d}B$$

Das elektrische Feld lässt sich wie im Kondensator durch eine Spannung ausdrücken. Diese Spannung ist die Hall-Spannung $V_\mathrm{H}$.

$$V_\mathrm{H} = Eb = v_\mathrm{d}Bb$$

b) Die Stromstärke lässt sich wie folgt ausdrücken

$$I = JA = nev_\mathrm{d}bd$$

Damit folgt

$$v_\mathrm{d} = \frac{I}{nebd}$$

c) Mithilfe von a) und b) ergibt sich für die Hall-Spannung $V_\mathrm{H}$

$$V_\mathrm{H} = v_\mathrm{d}Bb = \frac{IBb}{nebd} = \frac{IB}{ned}$$

Umformen und einsetzen der Werte ergibt

$$n = \frac{IB}{V_\mathrm{H}ed} = 5{,}85 \times 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$$

d) Die Dichte an Silberatomen berechnet sich wie folgt

$$n_\mathrm{atome} = \frac{\rho N_\mathrm{A}}{m_\mathrm{mol}} = \frac{10{,}5\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \cdot 6{,}023 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}}{107{,}9\,\mathrm{g\,mol}^{-1}} = 5{,}86 \times 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$$

Der Vergleich zeigt, dass in Silber etwa ein Ladungsträger pro Atom am Ladungstransport teilnimmt.

## Aufgabe 3

**Ampèresches Gesetz** Ein langer, gerader Draht mit Radius $R$ wird von einem Strom $I$ durchflossen. Nehmen Sie an, dass die Stromdichte über den Querschnitt des Drahtes konstant ist. Berechnen sie das Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Leiters mit dem Ampèreschen Gesetz.

### Lösung

Für die Anwendung des Ampereschen Gesetztes wählen wir einen Kreis mit Radius $r$ um den Mittelpunkt des Drahters. Da das Sytem zylindersymmetrisch ist, lässt sich das Amperesche Gesetz vereinfach zu

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 \int J dA \qquad \Longrightarrow \qquad B(r) 2\pi r = \mu_0 I_\mathrm{in}$$

wobei $J$ die Stromdichte ist und $I_\mathrm{in}$ den Strom inerhalb eines gedachten Kreises mit Radius $r$ ist. Da $I_\mathrm{in} = I$ für $r > R$, gilt für das Magnetfeld:

$$B(r)2\pi r = \mu_0 I \qquad \Rightarrow \qquad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Innerhalb des Leiters muss $I_\mathrm{in}$ abhängig von $r$ erst berechnet werden

$$I_\mathrm{in}(r) = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I \frac{r^2}{R^2}$$

Damit gilt dann

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$