# Übungsblatt 9
# Besprechung am 10.07.2016

### Aufgabe 1

**Maxwell Gleichungen.** In der Vorlesung wurden die Maxwell Gleichungen in ihrer integralen Form eingeführt.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} \qquad \text{Gaußsches Gesetz}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{Keine magnetischen Monopole}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \qquad \text{Faradaysches Induktionsgesetz}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \qquad \text{Ampèresches Gesetz}$$

Im Folgenden verwenden wir zwei wichtige Sätze der Vektoranalysis:

1. Der **Gaußsche Integralsatz** stellt den Zusammenhang zwischen der Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{\nabla} \cdot \vec{X}$ in einem Volumen $V$ und dem Fluss durch die geschlossene Oberfläche $A$ des Volumens $V$ her:

$$\oint_A \vec{X} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{X} \, dV$$

2. Mit dem **Satz von Stokes** kann man ein Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{\nabla} \times \vec{X}$ durch ein geschlossenes Kurvenintegral über den Rand $C$ der Fläche ausdrücken:

$$\oint_C \vec{X} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{\nabla} \times \vec{X} \cdot d\vec{A}$$

Führen Sie mit Hilfe dieser beiden Integralsätze die Maxwell Gleichungen von ihrer integralen in ihre differenzielle Darstellung über. Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} \\
\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \\
\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \\
\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

**Lösung:**

$$
\begin{aligned}
\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} &= 0 \\
\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} &= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \\
\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV &= 0 \\
\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \\
\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \\
\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int_A \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \\
\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \mu_0 \cdot I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \\
\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \mu_0 \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \\
\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \int_A \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \\
\int_A \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{A} &= \mu_0 \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \\
\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

## Aufgabe 2

**Schwingkreis.** Mithilfe eines LC-Schwingkreises kann die magnetische Suszeptibilität $\chi$ eines Materials gemessen werden. Dazu nutzt man aus, dass sich die Induktivität einer Spule ändert, wenn sich anstatt Luft ein Material unbekannter magnetischer Suszeptibilität $\chi$ in ihrem Kern befindet. Nehmen sie an, dass die Spule 3 cm lang ist, einen Durchmesser von 3 mm hat und der Spulendraht 500-fach gewickelt ist.

a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Resonanzfrequenz des LC-Schwingkreises her. Nehmen sie dazu an, dass der Gesamtwiderstand der Schaltung im Resonanzfall verschwindet.

b) Wie groß ist die Induktivität der luftgefüllten Spule? Nehmen Sie an, dass $\chi_{\text{Luft}} = 0$

c) Wie groß muss die Kapazität des Kondensators gewählt werden, damit die Resonanzfrequenz des Schwingkreises bei exakt 5 MHz liegt?

d) Nachdem das Matrial in die Spule gebracht wurde, sinkt die Resonanzfrequenz auf 4,9988 MHz. Wie groß ist die magnetische Suszeptibilität $\chi$ des Materials? Ist das Material diamagentisch oder paramagnetisch?

**Lösung.**

a) Der Gesamtwiderstand der Schaltung ist:

$$R = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

Im Resonanzfall ist der Gesamtwiderstand 0, die Resonanzfrequenz ist also gegeben durch:

$$R = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b)

$$L = \mu_{\text{Luft}}\mu_0 N^2 \frac{A}{l} = (1 + \chi_{\text{Luft}})\mu_0 N^2 \frac{A}{l} = \mu_0 500^2 \frac{\pi(1{,}5\,\text{mm})^2}{3\,\text{cm}} = 7{,}402 \times 10^{-5}\,\text{H}$$

c)

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = 5{,}4038 \times 10^{-10}\,\text{F}$$

d) Es gilt

$$L' = \mu\mu_0 N^2 \frac{A}{l} = (1 + \chi)\mu_0 N^2 \frac{A}{l} = (1 + \chi)L \quad \text{und} \quad L' = \frac{1}{\omega'^2 C}$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\chi = \frac{1}{\omega'^2 CL} - 1 = 4{,}802 \times 10^{-4}$$

Das Material ist paramagnetisch, da $\chi > 0$.

**Aufgabe 3**

**Die elektromagnetische Welle.** Aus den Maxwell-Gleichungen lässt sich ableiten, dass elektromagnetische Wellen, die sich in Richtung $z$ ausbreiten, folgende Differentialgleichungen erfüllen müssen:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

a) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die harmonische Welle $\vec{E}(z,t) = E_0 \hat{x} \sin(\omega t - kz)$ ($\hat{x}$ ist hier der Einheitsvektor in $x$ Richtung) eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. In welcher Beziehung müssen $c$, $\omega$ und $k$ stehen damit die Gleichung erfüllt ist?

b) Zeigen Sie durch Einsetzen in eine Maxwell-Gleichung, die elektrisches und magnetisches Feld verknüpft, beispielsweise

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0,$$

dass das magnetische Feld durch $\vec{B}(z,t) = B_0 \hat{y} \sin(\omega t - kz)$ geben ist. In welcher Beziehung stehen $E_0$ und $B_0$?

c) Skizzieren Sie qualitativ die Richtung und Amplitude des elektrischen und magnetischen Feldes entlang der Ausbreitungsrichtung der Welle.

**Lösung:**

a)

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -kE_0 cos(\omega t - kz) \qquad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k^2 E_0 sin(\omega t - kz)$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \omega E_0 cos(\omega t - kz) \qquad \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 sin(\omega t - kz)$$

Einsetzen in Differentialgleichung ergibt:

$$-k^2 E_0 sin(\omega t - kz) + \frac{1}{c^2}\omega^2 E_0 sin(\omega t - kz) = 0$$

Die Gleichung ist erfüllt für

$$k^2 = \frac{1}{c^2}\omega^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = ck$$

b) Es gilt nach den Maxwellgleichungen

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

Hier gilt

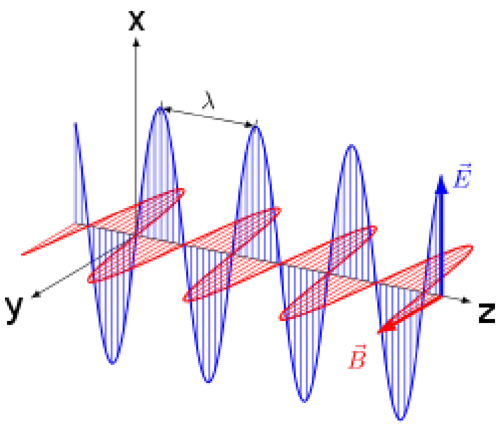
$$
\begin{aligned}
\nabla \times E &= \nabla \times \left(E_0 \hat{x} \sin(\omega t - kz)\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial z} \hat{y} - \frac{\partial}{\partial y} \hat{z}\right) \left(E_0 \sin(\omega t - kz)\right) \\
&= -kE_0 \hat{y} \cos(\omega t - kz) \\
\frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(B_0 \hat{y} \sin(\omega t - kz)\right) \\
&= \omega B_0 \hat{y} \cos(\omega t - kz)
\end{aligned}
$$

Einsetzen ergibt

$$
\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = -kE_0 \hat{y} \cos(\omega t - kz) + \omega B_0 \hat{y} \cos(\omega t - kz) = 0
$$

Diese Gleichung ist erfüllt für

$$
\omega B_0 = kE_0 \qquad \Rightarrow \qquad B_0 = \frac{E_0}{c}
$$




c)