

Übungsblatt 11

Besprechung am 04.07.2016

Aufgabe 1

Abbildung durch dünne Linsen.

Eine Lichtquelle soll durch eine dünne Linse mit Brennweite $f = 100 \text{ mm}$ auf einen Schirm im festem Abstand $l = 2 \text{ m}$ von der Quelle abgebildet werden (Abb. 1). Die Linse kann dabei entlang L frei bewegt werden.

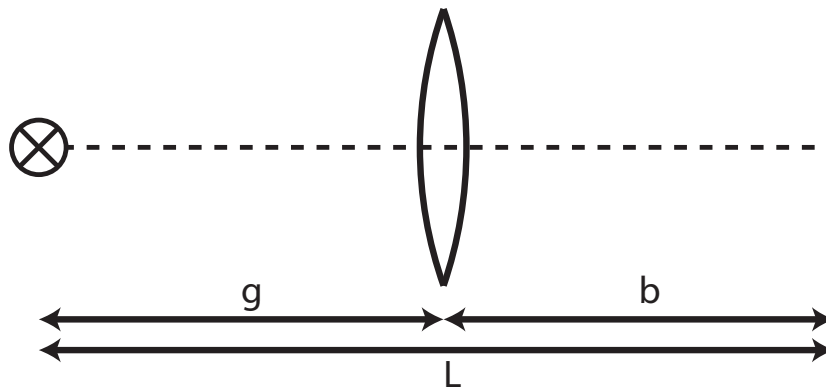


Abbildung 1: Bewegliche Linse

- Bei welchen Gegenstandsweiten g entsteht eine scharfe Abbildung auf dem Schirm?
Hinweis: Nutzen Sie die Linsengleichung und, dass der Abstand zwischen Lichtquelle und Schirm konstant ist.
- Wie groß muss bei gegebener Brennweite f der Linse der Abstand zwischen Quelle und Schirm mindestens sein damit ein scharfes Bild entstehen kann?

Lösung

a) Es gilt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Mit $g + b = L$:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{L - g}$$

Lösen der quadratischen Gleichung liefert:

$$g_{1/2} = \frac{L}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4f}{L}} \right)$$

Einsetzen:

$$g_1 = 106 \text{ mm} \quad g_2 = 1894 \text{ mm}$$

b) Für eine scharfe Abbildung darf die Diskriminante aus a) nicht negativ sein:

$$L \geq 4f$$

Aufgabe 2

TIRF Mikroskopie.

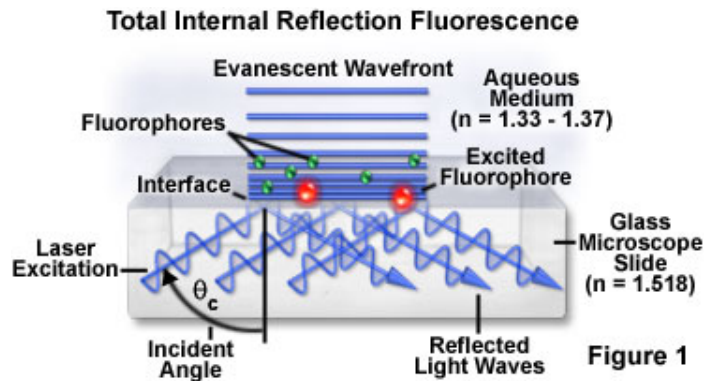


Abbildung 2: TIRF

TIRF (total internal reflection fluorescence) Mikroskopie ist eine oft verwendete Technik in der Einzelmolekülbiophysik. Dabei wird ausgenutzt, dass Licht, welches unter Winkeln größer dem kritischen Winkel θ_c auf einen Objektträger unterhalb eines Probenvolumens eingestrahlt wird, total reflektiert wird. Löst man die Maxwellgleichungen für diese Konstellation, findet man, dass dennoch Licht mit exponentiell abfallender Intensität in das Probenvolumen eindringt (evaneszentes Feld). Befinden sich im Probenvolumen Fluorophore, die mit der eingestrahelten Wellenlänge angeregt werden können, findet daher eine Anregung nur sehr nahe der Oberfläche statt.

- a) Berechnen Sie mit dem Snellius'schen Brechungsgesetz den kritischen Winkel θ_c für einen Glasobjektträger mit Brechungsindex $n_G = 1.5$ und Wasser mit $n_W = 1.33$.
- b) Das evaneszente Feld hat eine Intensität

$$I(z) = I_0 \exp\left(-\frac{z}{d}\right)$$

wobei die charakteristische Eindringtiefe d durch

$$d = \frac{\lambda}{4\pi} (n_G^2 \sin^2(\theta) - n_W^2)^{-\frac{1}{2}}$$

gegeben ist und θ der Winkel des eingestrahelten Lichts ist.

Berechnen Sie die charakteristische Eindringtiefe für blaues Laserlicht der Wellenlänge $\lambda = 455 \text{ nm}$ und einen Einfallswinkel 2° oberhalb des kritischen Winkels.

- c) In TIRF Mikroskopen wird das von den angeregten Fluorophoren emittierte Licht vom Anregungslicht getrennt und auf EMCCD Kameras abgebildet. Gehen Sie davon aus, dass in solch einem Mikroskop laterale Abstände von 150 nm aufgelöst werden können und nur Fluorophore innerhalb der charakteristischen Eindringtiefe d angeregt werden können. Wie groß darf die Konzentration von Fluorophoren im Medium höchstens sein, damit im Schnitt nur ein Fluorophor pro Anregungsvolumen anzutreffen ist? Gehen Sie der Einfachheit halber davon aus, dass sich die Fluorophore im Medium wie auf einem einfachen kubischen Gitter verteilen!

Lösung

- a) Es gilt das Brechungsgesetz:

$$n_G \sin \theta = n_W \sin \theta_T$$

Für Totalreflexion wird $\sin \theta_T = 1$ und damit

$$\theta_c = \arcsin \left(\frac{n_W}{n_G} \right) = 62.5^\circ$$

- b) Für blaues Licht findet man

$$d = 143 \text{ nm}$$

- c) Unter der (sehr vereinfachenden) Annahme, dass sich die Fluorophore in Lösung gleichmäßig wie auf einem kubischen Gitter verteilen, muss die Gitterkonstante größer als der vom Mikroskop auflösbare Abstand von 150 nm sein. Es ist also 1 Fluorophor in einem Würfel mit Kantenlänge $a = 150 \text{ nm}$:

$$c = \frac{1}{N_A a^3} = 500 \text{ nmol L}^{-1}$$

Aufgabe 3

Abbe Limit. Die theoretische Grenze zur Auflösung eines optischen Mikroskops durch Beugung ist durch das Abbe Limit gegeben:

$$d = \frac{\lambda}{2n \sin \theta} = \frac{\lambda}{2NA}$$

Wobei NA die numerische Apertur des Systems ist.

- a) Wie groß müssen Strukturen mindestens sein, damit sie mit grünem Licht ($\lambda = 550 \text{ nm}$) und einem Objektiv mit numerischer Apertur $NA = 1.5$ aufgelöst werden können?
- b) In einem Elektronenmikroskop durchlaufen Elektronen eine Beschleunigungsspannung von $U = 10 \text{ kV}$. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Elektronen nach Durchlaufen der Beschleunigungsspannung?

- c) Wie Photonen besitzen auch Elektronen einen Welle-Teilchen-Dualismus, können also gebeugt werden. Die Wellenlänge von Elektronen berechnet sich gemäß der de Broglie Gleichung:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

wobei h das planck'sche Wirkungsquantum und p der Impuls der Elektronen sind.

Berechnen Sie das Auflösungsvermögen eines Elektronenmikroskops mit numerischer Apertur $NA = 0.01$

Lösung

- a)

$$d = 183 \text{ nm}$$

- b) Die Elektronen erhalten die kinetische Energie:

$$E = eU = \frac{1}{2}mv^2$$

Daraus erhält man die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 59.3 \times 10^6 \text{ m s}^{-1} = 0.2c$$

- c) Für das Elektronenmikroskop findet man ein Auflösungsvermögen:

$$d = \frac{h}{NA\sqrt{8meU}} = 0.6 \text{ nm}$$