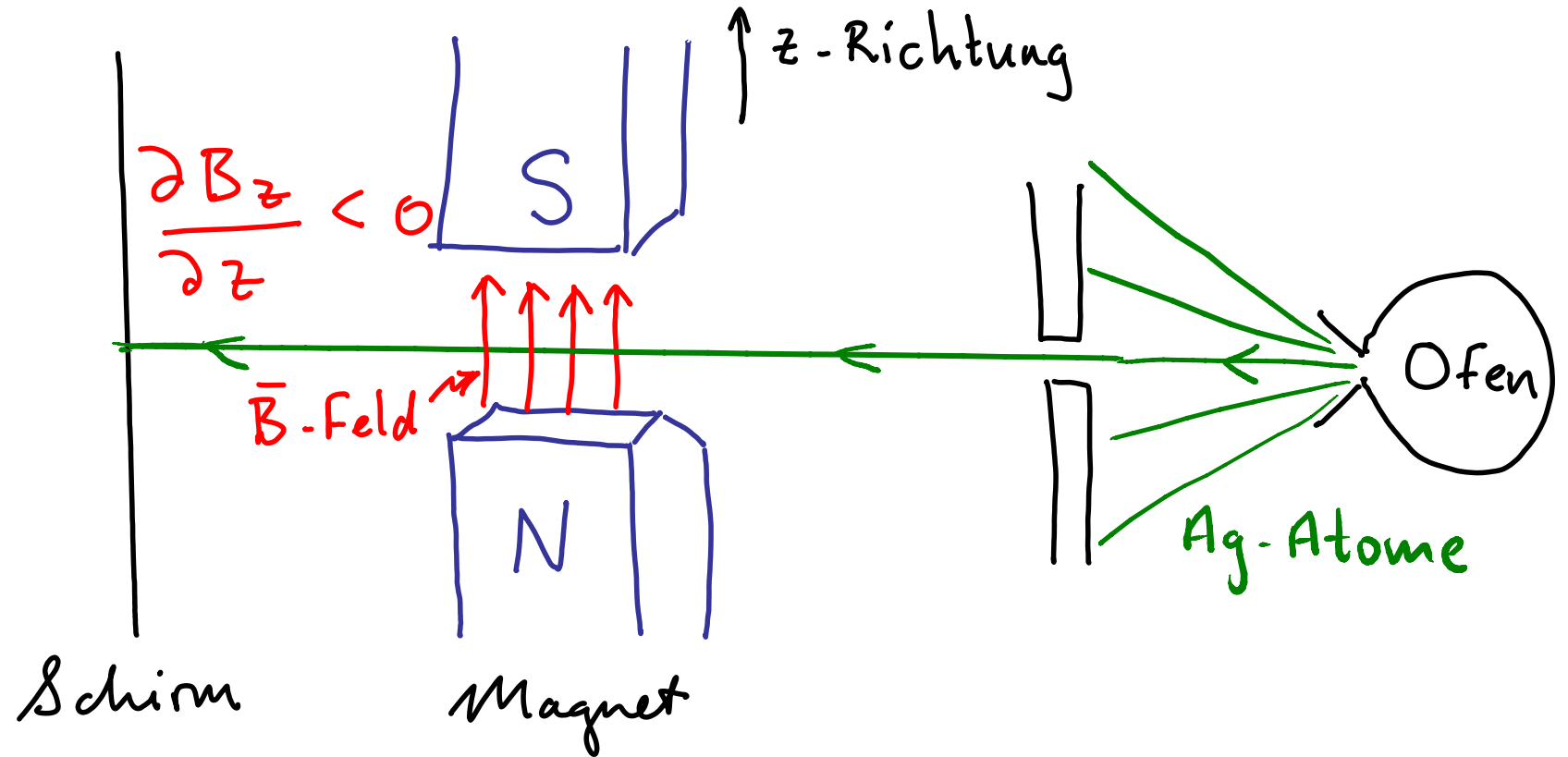


1. Grundlegende Begriffe der Quantenmechanik

1.1 Stern-Gerlach Experiment (S1.1=Sakurai1.1)

Ein Strahl neutraler Silber-Atome mit Spin 1/2 wird durch ein inhomogenes Magnetfeld geschickt:

Ag: Spin 1/2



Magnetisches Moment des Atoms:
($e < 0$ ist Elektronladung)

$$\vec{\mu} = \frac{e}{mc} \vec{S}$$

Spin

2

Wechselwirkungsenergie mit B-Feld:

$$-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

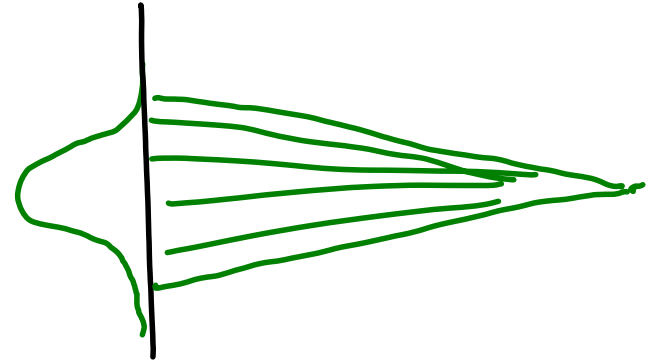
(ignoriere andere Komponenten)
z-Komponente der Kraft, welche
Magnetfeld auf Atom ausübt:

$$F_z = \partial_z (\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \mu_z \underbrace{\partial_z B_z}_{< 0}$$

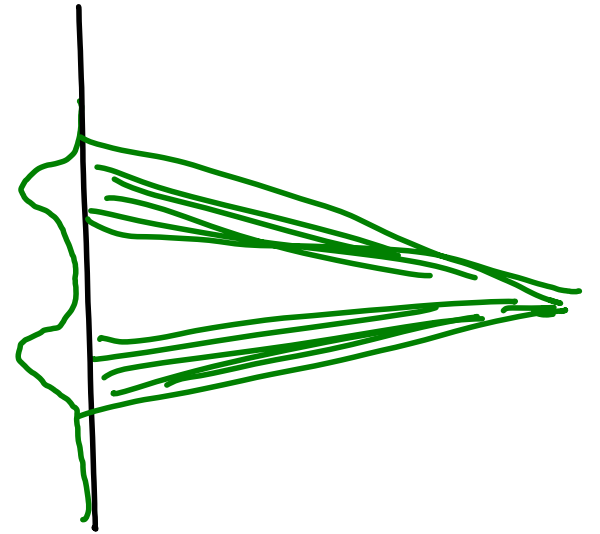
$$\mu_z < 0 \quad (S_z > 0) \quad \Rightarrow \quad F_z > 0$$

$$\mu_z > 0 \quad (S_z < 0) \quad \Rightarrow \quad F_z < 0$$

Klassische Erwartung: keine Vorzugsrichtung für $\vec{\mu}$, also alle μ_z -Werte zwischen $-|\vec{\mu}|$ und $|\vec{\mu}|$ sind erlaubt, Strahl wird homogen aufgefächert.



Tatsächlich beobachtet: Strahl spaltet sich in zwei Teile ("Raumquantisierung"), also sind nur 2 Werte für μ_z erlaubt.



$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

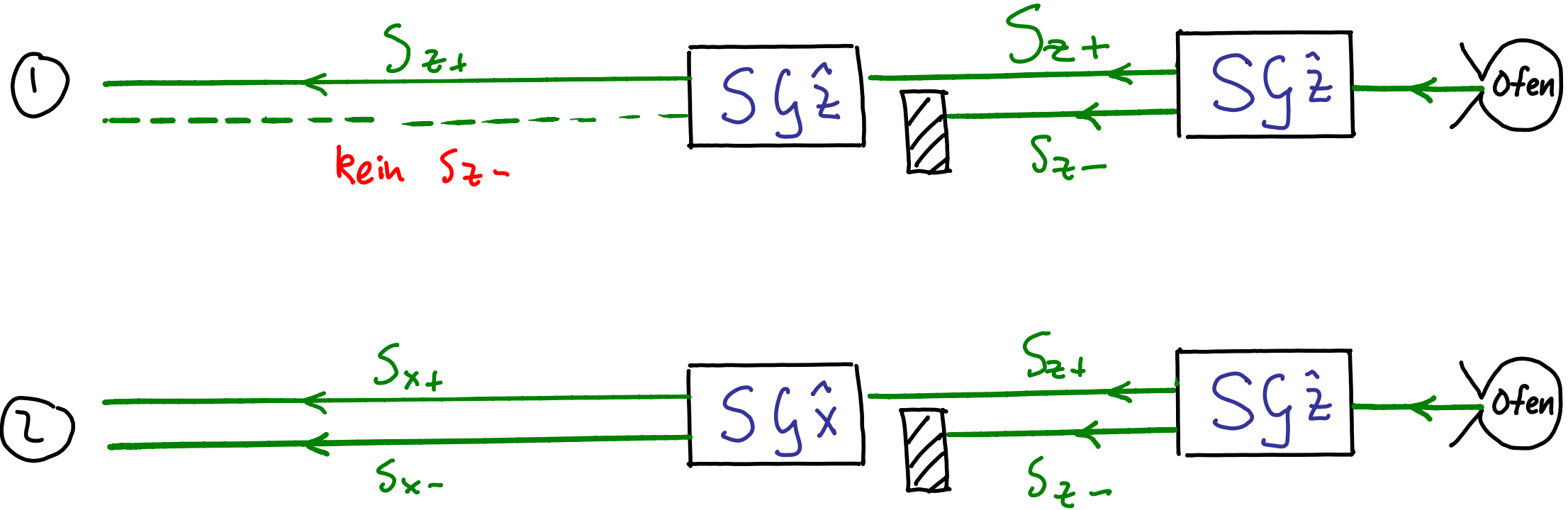
↑ Planck'sches Wirkungsquantum

Analoges gilt für Feld-Inhomogenität in x- oder y-Richtung: nur 2 Werte für S_x oder S_y sind erlaubt.

Aufeinanderfolgende Stern-Gerlach-Messungen 4

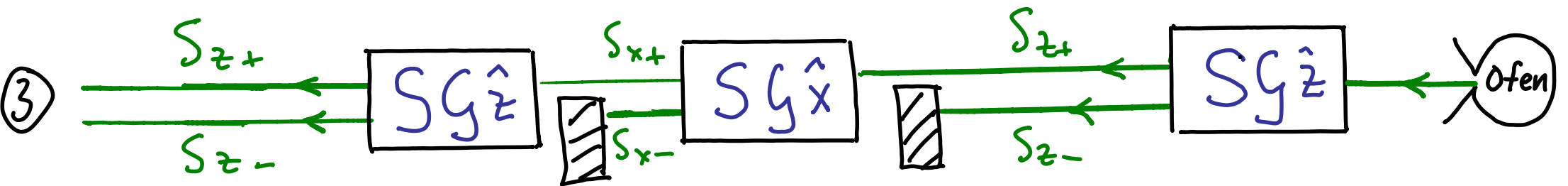
Endergebnis:

Zwischenergebnis:



Anscheinend haben 50% der S_{z+} Atome sowohl S_{z+} als auch S_{x+} ,

NEIN, denn

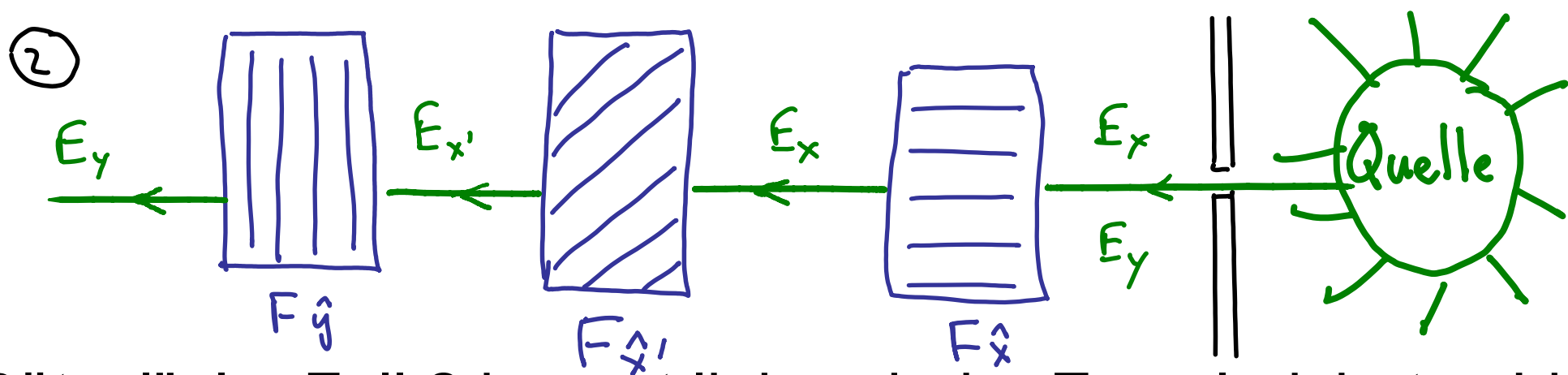
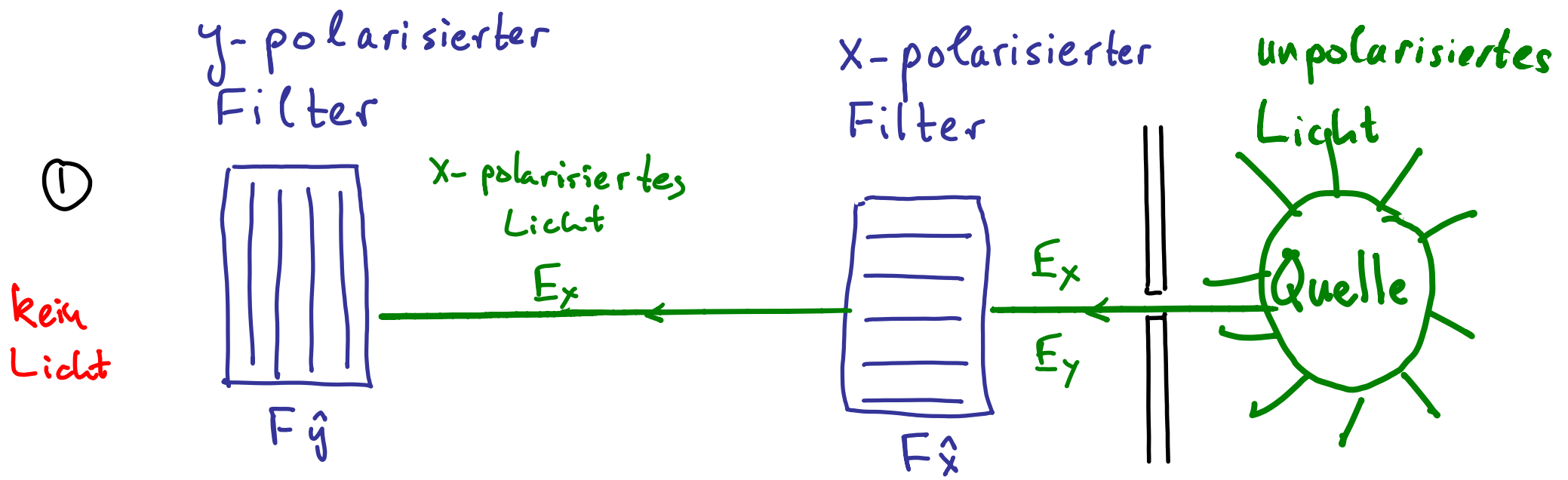
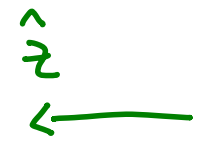


"Rätsel": Im Fall 3 kommen links wieder Sz- Atome an, obwohl der erste Block alle Sz- Atome abgeblockt hatte! Offensichtlich ist die Annahme, dass die beim dritten Stern- Gerlach-Apparat einfallenden Atome sowohl Sz+ als auch Sx- haben, falsch.

Dieses Beispiel wird oft benutzt um zu illustrieren, dass in der QM Sz und Sx nicht gleichzeitig bestimmt werden können. Genauer gesagt: durch das Bestimmen von Sx durch den zweiten Stern- Gerlach-Apparat geht alle vorherige Information über Sz verloren!

Zum Vergleich: für klassischen Drehimpuls sind alle drei Komponenten gleichzeitig bestimmbar.

Analogie mit Polarisation von Licht



"Rätsel": Im Fall 2 kommt links wieder E_y polarisiertes Licht an, obwohl der erste Block alles E_y Licht abgeblockt hatte!

Analogie:

Nach S_x Messung ist Information über S_z verloren
 " " $E_{x'}$ " " " " E_x "

Messgerät: Stern-Gerlach \Leftrightarrow polarisierter Filter

Observable: Spin des Ag-Atoms $\left\{ \begin{matrix} S_{z+} \\ S_{z-} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} E_x \\ E_y \end{matrix} \right\}$ Polarization des E-felds

" $\left\{ \begin{matrix} S_{x+} \\ S_{x-} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{matrix} \right\}$ "

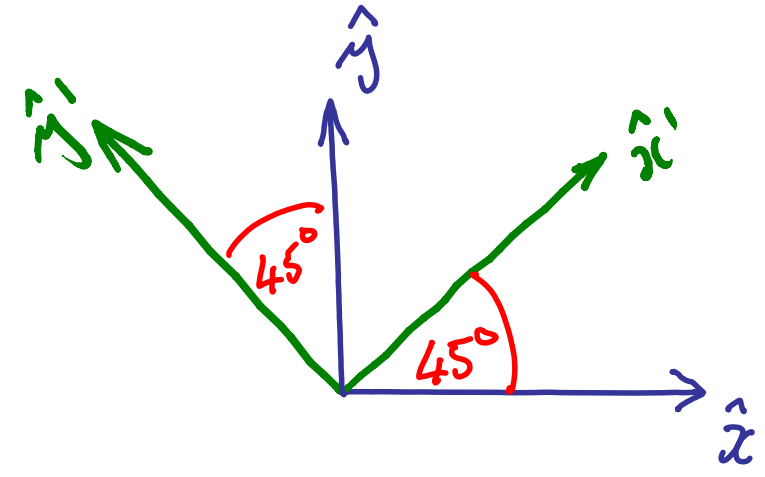
Mathematische Beschreibung der Polarisation:

$$\vec{E}_x = E_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t)$$

$$\vec{E}_y = E_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t)$$

$$\vec{E}_{x'} = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y}) \cos(kz - \omega t)$$

$$\vec{E}_{y'} = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{x} + \hat{y}) \cos(kz - \omega t)$$



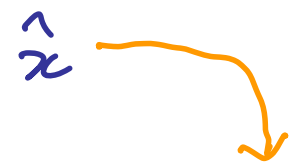
$$\hat{x}' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y})$$

$$\hat{y}' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{x} + \hat{y})$$

$\vec{E}_{\hat{x}}$ lässt \hat{x} Polarisation durch

$\vec{E}_{\hat{x}'}$ " $\hat{x}' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y})$ " "

$\vec{E}_{\hat{y}}$ " \hat{y} " "



Für Licht ist des "Rätsels" Lösung die Tatsache, dass die Polarisation einer elektromagnetische Welle durch einen 2-dimensionalen Vektor (in der Ebene senkrecht zur Propagationsrichtung) dargestellt wird:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} + & \hat{x} + \hat{y} \\ - & \hat{x} - \hat{y} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

Für Spin ist des "Rätsels" Lösung analog: jeder physikalischer Zustand, der durch eine bestimmte Spin-Richtung (z.B. Sz+, Sz-, Sx+, Sx-) gekennzeichnet ist, wird durch einen Vektor ("ket", nach Dirac) in einem abstrakten, 2-dimensionalen Vektorraum dargestellt:

Zustand

Darstellung durch ket (9.2)

Sz	Messung	liefert	$\begin{cases} + \\ - \end{cases}$	\Leftrightarrow	$\begin{cases} +\rangle_z \\ -\rangle_z \end{cases}$	Analog zu gl. (9.1)
"	"	"	"	"	"	
Sx	"	"	$\begin{cases} + \\ - \end{cases}$	\Leftrightarrow	$\begin{cases} +\rangle_x \\ -\rangle_x \end{cases}$	= $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{matrix} + & +\rangle_z \\ - & -\rangle_z \end{matrix} \right]$
"	"	"	"	"	"	

Darstellung von S_y , per Analogie zur Zirkularpolarisation:

10

Messung von S_z , dann S_y , ist analog zu S_z , dann S_x .
Also sollten $|+\rangle_y$ und $|-\rangle_y$ auch Überlagerungen von $| \pm \rangle_z$ sein.
Sie sollten aber auch von $| \pm \rangle_x$ verschieden sein!?!

Analog zu linear vs. zirkular polarisiertem Licht:

(10.2)

Zirkular
polarisiert:
(rechts / links)

$$\vec{E}_{\pm} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[\hat{x} \cos(kz - \omega t) + \hat{y} \cos(kz - \omega t \mp \frac{\pi}{2}) \right]$$

\hat{x} und \hat{y} -Komponenten sind
phasenverschoben!

Kurznotation
mittels komplexen
Feldern:

$$\vec{E}_{\pm} = \text{Re}(\vec{\bar{E}}_{\pm}), \quad \vec{\bar{E}}_{\pm} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\hat{x} \pm i \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)}$$

$\pm i = e^{\pm i\pi/2}$

(10.3)

Analogie: Spin $\begin{Bmatrix} S_{y+} \\ S_{y-} \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} \text{rechts} \\ \text{links} \end{Bmatrix}$ - zirkular - polarisiertes Licht \perp

Also setzen wir Tabelle 9.2 wie folgt fort:

Zustand

Darstellung durch ket

S_y Messung liefert $\begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} |+\rangle_y \\ |-\rangle_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle_z \pm i|-\rangle_z \right]$

Ansatz analog zu (10.3)

Bemerkenswert: wir benötigen einen komplexen Vektorraum!

Schlussfolgerung aus Stern-Gerlach-Exp:

Quantenmechanische Zustände sind durch Vektoren in einem abstrakten, komplexen Vektorraum darzustellen.

Spaltenvektor- und Matrix-Darstellung für Spin-Zustände & Operatoren

$$|+\rangle_z := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$|-\rangle_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Für $j = x, y, z$: $|\pm\rangle_j$ sind Eigenzustände des Spin-Operators \hat{S}_j mit Eigenwert $\pm \hbar/2$

Matrix-Darstellung der Spinoperatoren: $\hat{S}_j := \frac{\hbar}{2} \sigma_j$

mit Pauli-Matrizen: $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Eigenzustand: $\hat{S}_z |\pm\rangle_z = \frac{\hbar}{2} (\pm) |\pm\rangle_z$

Spin-Algebra:
(nachrechnen!)

$$[S_i, S_j] = i \epsilon_{ijk} \hbar S_k$$

↙ Levi-Civita
↘ Kommutator

$$\{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2} \delta_{ij}$$

Kronecker- δ