Errata zu Blatt 04: Thermodynamische Potentiale

Aufgabe 3 Phasenübergang zum Supraleiter

Viele Metalle gehen bei tiefer Temperatur T und kleinem Magnetfeld B von der normalleitenden Phase (Superskript n) in eine supraleitende Phase (Superskript s) über. Für niedrige Temperaturen bis in die Nähe des Phasenübergangs hinein sind die Wärmekapazitäten der beiden Phasen in guter Näherung gegeben durch

$$C_V^s(T) = V\,\alpha\,T^3 \tag{1}$$

$$V_V^n(T) = V\,\left(\beta\,T^3 + \gamma\,T\right). \tag{2}$$

α, β, und γ sind Konstanten.

Sie dürfen im Folgenden davon ausgehen, dass sich das Volumen beim Phasenübergang nicht ändert, also dass mechanische Arbeit keine Rolle spielt.

a-d) [. . .]

e) (**3 Punkte**) Ein Supraleiter ist im Inneren magnetfeldfrei. Das wird bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfelds B durch eine entgegengesetzte Magnetisierung $M^s = -\frac{B\,V}{4\,\pi}$ (in entsprechenden Einheiten) erreicht. Das Aufbauen dieser Magnetisierung kostet die Arbeit $-B\,\mathrm{d}M$. Im Normalleiter gelte hingegen $M^n = 0$. Zeigen Sie damit, dass das kritische Feld $B_c(T)$, bei dem die supraleitende Phase bei konstanter Temperatur in die normalleitende Phase übergeht, die Form

$$B_c(T) = B_0\left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right) \tag{3}$$

hat. Bestimmen Sie B_0.

Lösung Aus den vorherigen Teilaufgaben (für $B = 0$) wissen wir:

$$T_c^2 = \frac{3\,\gamma}{\alpha - \beta} \tag{4}$$

$$T_c^2 = \frac{4\,\Delta}{\gamma} \tag{5}$$

$$F^s(T,V) = E_0 - V\,\Delta - \frac{\alpha}{12}\,T^4\,V \tag{6}$$

$$F^n(T,V) = E_0 + \left(\frac{\beta}{12}\,T^2 - \frac{\gamma}{2}\right)\,T^2\,V \tag{7}$$

Als nächstes müssen wir die magnetische Arbeit für den Fall des Supraleiters berechnen. Wegen der zusätzlichen Randbedingung, dass der Supraleiter im Inneren magnetfeldfrei sei, ist die magnetische Arbeit nicht einfach $B\,M$. Stattdessen:

$$B = \frac{\partial E}{\partial M} = -\frac{4\,\pi}{V}\,M \quad \Leftrightarrow \quad E(M) = -\frac{2\,\pi}{V}\,M^2, \tag{8}$$

beziehungsweise $E(B) = -\frac{V}{8\,\pi}\,B^2$. Wir können jetzt die Rechnung aus d) wiederholen, wobei wir einen zusätzlichen Term zu Δ hinzufügen, d. h. $\Delta \to \Delta - \frac{B^2}{8\,\pi}$ ersetzen. Es gilt also:

$$F^s(T, V, B) = E_0 - V\,\Delta + \frac{V}{8\,\pi}\,B^2 + \frac{\alpha}{12}\,V\,T^4 \tag{9}$$

und F^n wie oben. Wie zuvor wird die Phase mit der niedrigeren Freien Energie realisiert. Außerdem sind beide Funktionen stetig, also findet der Übergang bei ihrem Schnittpunkt statt, und wir dürfen schreiben:

$$F^s(T, V, B_c) \stackrel{!}{=} F^n(T, V) \tag{10}$$

$$\frac{B_c^2}{8\,\pi} = \Delta + \frac{\alpha - \beta}{12}\,T^4 - \frac{\gamma}{2}\,T^2. \tag{11}$$

Wir setzen jetzt unser Wissen ein, um α, β und γ durch Δ und T_c zu ersetzen:

$$\frac{B_c^2}{8\,\pi} = \Delta + \frac{\gamma}{4}\,\frac{T^4}{T_c^2} - 2\,\Delta\,T_c^2 \tag{12}$$

$$= \Delta + \Delta\,\frac{T^4}{T_c^4} - 2\,\Delta\,T_c^2 \tag{13}$$

$$= \Delta\,\left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right)^2 \tag{14}$$

$$B_c = \sqrt{8\,\pi\,\Delta}\,\left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right). \tag{15}$$

Folglich ist $B_0 = \sqrt{8\,\pi\,\Delta}$.