R: Rechenmethoden

LS Schollwöck, Sommersemester 2011

Blatt Nr. 6

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Gruppen-Nr. auf die Lösung.
Abgabe: Montags 12 Uhr in den Kästen im 4. Stock (beim nördlichen Aufzug).

Frage 6.1

a) Wie ist der Nabla-Operator, $\vec{\nabla}$, definiert?

b) Diskutieren Sie, ob folgende Operatoren auf Skalare, ϕ, oder auf Vektoren, $\vec{v}$, wirken? Schreiben Sie die Operatoren mittels $\vec{\nabla}$.
  (i) div
  (ii) rot
  (iii) grad
  (iv) div grad

c) Was ergeben rot grad ϕ und div rot $\vec{v}$ für alle $\phi, \vec{v}$?

Tutoriumsaufgabe 6.2 — *Vektoranalysis I*

Gegeben seien die folgenden Felder:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= Q\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right), \\ \vec{A}(\vec{r}) &= K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ln(x^2+y^2) \end{pmatrix} \text{ für } x^2 + y^2 \neq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

a) Berechnen Sie $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$, $\operatorname{div}\vec{E}$ und $\operatorname{rot}\vec{E}$.

b) Berechnen Sie $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, $\operatorname{div}\vec{B}$ und $\operatorname{rot}\vec{B}$.

Tutoriumsaufgabe 6.3 — *Differentialoperatoren der Vektoranalysis: nützliche Identitäten*

Überprüfen Sie die folgenden Identitäten, wobei $\varphi(\vec{r})$ skalare und $\vec{E}(\vec{r})$ vektorielle Funktionen sind.

a) $\operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \vec{\nabla}^2\vec{E}$

b) $\operatorname{div}\left(\varphi\,\vec{E}\right) = \varphi\,\operatorname{div}\vec{E} + \vec{E}\cdot\operatorname{grad}\,\varphi$

Aufgabe 6.4 — *Vektoranalysis II: Potentiale*

Berechnen Sie die folgenden Felder

a) elektrisches Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ eines Dipols, wo $\vec{p}$ ein konstantes Dipolmoment ist:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}.$$

b) Gravitationsfeld einer homogenen Kugel, $\vec{F}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(r)$, mit

$$\Phi(r) = GMm\begin{cases} -\frac{1}{r} & r \geq R \\ \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3} - \frac{3}{2}\frac{1}{R} & r < R \end{cases}$$

Aufgabe 6.5 — *Differentialoperatoren der Vektoranalysis: Produktformeln*

Überprüfen Sie die folgenden Identitäten, wobei $\varphi(\vec{r})$, $\psi(\vec{r})$ skalare und $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ vektorielle Funktionen sind.

a) $\mathrm{grad}(\varphi\psi) = \varphi\,\mathrm{grad}\,\psi + \mathrm{grad}\,\varphi\psi$

b) $\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\,\mathrm{rot}\;\vec{E} - \vec{E}\cdot\,\mathrm{rot}\;\vec{B}$

c) $\mathrm{rot}\left(\varphi\,\vec{B}\right) = \varphi\;\mathrm{rot}\,\vec{B} - \vec{B}\times\mathrm{grad}\;\varphi$

d) * $\mathrm{rot}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E} - \left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \vec{E}\;\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\;\mathrm{div}\,\vec{E}$

Aufgabe 6.6 — *Poloidale und Toroidale Vektorfelder*

Vektorfelder $\vec{F}_p$ und $\vec{F}_t$, welche sich folgendermaßen darstellen lassen

$$\begin{aligned} \vec{F}_p &= \vec{\nabla}\times\left[\vec{r}\times\vec{\nabla}\chi\right], \\ \vec{F}_t &= -\vec{r}\times\left(\vec{\nabla}\phi\right), \end{aligned} \tag{2}$$

heißen *poloidal* bzw. *toroidal*. Hierbei sind χ und ϕ Skalarfelder genannt poloidales bzw. toroidales Debyepotential.

a) Zeigen Sie, dass beide Vektorfelder quellenfrei sind.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{rot}\,\vec{F}_p$ ein toroidales Feld und $\mathrm{rot}\,\vec{F}_t$ ein poloidales Feld ergibt.

Aufgabe 6.7 — *Totales Differential*

Gegeben sei folgendes Potential:

$$\Phi = K\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \tag{3}$$

Zusätzlich ist folgende Bahnkurve gegeben:

$$\mathcal{C} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \alpha t\sin(\omega t) \\ \alpha t\cos(\omega t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

a) Interpretieren Sie Φ und $\mathcal{C}$ geometrisch.

Wie großist die totale zeitlich Änderung des Potentials entlang der Kurve $\mathcal{C}$? Berechnen Sie diese Größe auf zwei Wegen:

b) Setzen Sie die Bahnkurve in das Potential ein und leiten Sie ab.

c) Berechnen Sie $\vec{\nabla}\Phi$ und $\dot{x}(t)$ und nutzen Sie die Relation aus der Vorlesung