Aufgabe 1: Charakteristische Funktion

Die charakteristische Funktion $\chi(k)$ einer Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ wird definiert als

$$\chi(k) := \int \mathrm{d}x\, p(x)\, e^{-ikx}. \tag{1}$$

Berechnen Sie die charakteristische Funktion, den Erwartungswert und die Varianz der folgenden Wahrscheinlichkeitsdichten:

a) $p(x) = \frac{1}{2a}$ für $|x| < a$, 0 sonst

b) $p(x) = \frac{1}{2a} \exp\left(-\frac{|x|}{a}\right)$, $a > 0$

c) $p(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$

Aufgabe 2: Zeitentwicklung

Der Erwartungswert einer Observable $\mathcal{O}$ bezüglich eines Gemengezustands $\rho(\mathbf{X}, t)$ ist durch

$$\langle \mathcal{O}[\rho] \rangle (t) = \int \mathrm{d}\mathbf{X}\ \rho(\mathbf{X}, t) \mathcal{O}(\mathbf{X}) \tag{2}$$

gegeben, wobei die Dynamik von $\rho(\mathbf{X}, t)$ durch den Liouvilleschen Satz

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = -\left[\rho, \mathcal{H}\right]_{PK} \tag{3}$$

bestimmt ist und

$$[A, B]_{PK} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial B}{\partial q^i} \frac{\partial A}{\partial p^i} \right). \tag{4}$$

Beweisen Sie folgende Gleichung:

$$\frac{d\langle \mathcal{O} \rangle}{dt} = \langle [\mathcal{O}, \mathcal{H}]_{PK} \rangle. \tag{5}$$

Wie lautet der entsprechende Ausdruck der Quantenmechanik?

Tipp: Verwenden Sie partielle Integration und die Tatsache, dass $\rho(\mathbf{X}, t)$ am Rand des Phasenraums verschwindet.

Aufgabe 3: BBGKY - Hierarchie

Oft enthält die volle Phasenraumdichte ρ mehr Information als notwendig - zur Berechnung vieler Größen reicht schon Kenntnis der Einteilchendichte f_1 aus. Diese Verteilungsfunktion beschreibt die Wahrscheinlichkeit, irgendeines der N Teilchen am Ort $\vec{q}$ mit Impuls $\vec{p}$ zur Zeit t zu finden:

$$f_1(\vec{p},\vec{q},t) = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \delta^3(\vec{p}-\vec{p}_i)\delta^3(\vec{q}-\vec{q}_i) \right\rangle \tag{6}$$

$$= N \int \prod_{i=2}^{N} \mathrm{d}^3 p_i \, \mathrm{d}^3 q_i \, \rho(\vec{p}_1 = \vec{p}, \vec{q}_1 = \vec{q}, \vec{p}_2, \vec{q}_2, ..., \vec{p}_N, \vec{q}_N, t). \tag{7}$$

a) Ermitteln Sie den entsprechenden Ausdruck für die s-Teilchendichte f_s mit ganzzahligem s unter Annahme, dass ρ symmetrisch unter Teilchenaustausch ist.

Es sei der folgende allgemeine Hamilton-Operator mit externem Potential U und Paarwechselwirkung $\mathcal{V}$ gegeben:

$$\mathcal{H}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + U(\vec{q}_i) \right] + \sum_{i<j}^{N} \mathcal{V}(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|). \tag{8}$$

b) Beweisen Sie, dass die s-Teilchendichte der sog. BBGKY-Hierarchie gehorcht:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} - [\mathcal{H}_s, f_s]_{PK} = \sum_{i=1}^{s} \int \mathrm{d}V_{s+1} \frac{\partial \mathcal{V}(|\vec{q}_i - \vec{q}_{s+1}|)}{\partial \vec{q}_i} \cdot \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \vec{p}_i}. \tag{9}$$

Tipp: Trennen Sie $\mathcal{H}$ in

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_{N-s} + \mathcal{H}' \tag{10}$$

mit

$$\mathcal{H}_s = \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + U(\vec{q}_i) \right] + \sum_{i<j}^{s} \mathcal{V}(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|) \tag{11}$$

$$\mathcal{H}_{N-s} = \sum_{i=s+1}^{N} \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + U(\vec{q}_i) \right] + \sum_{i=s+1, i<j}^{N} \mathcal{V}(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|) \tag{12}$$

$$\mathcal{H}' = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=s+1}^{N} \mathcal{V}(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|) \tag{13}$$

und berechnen Sie

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} \propto \int \prod_{i=s+1}^{N} \mathrm{d}V_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int \prod_{i=s+1}^{N} \mathrm{d}V_i \Big[\rho, \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_{N-s} + \mathcal{H}' \Big]_{PK}. \tag{14}$$