Klausur zur T1: Theoretische Mechanik, SoSe2014
Prof. Dr. Dieter Lüst
Theresienstr. 37, Zi. 425

Dr. Reinke Sven Isermann
Reinke.Isermann@lmu.de

Klausur - Theoretische Mechanik für Bachelor (T1)

Hinweis: Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben mit jeweils 20 Punkten. Es werden allerdings nur die besten vier Aufgaben gewertet. Falls Sie alle fünf Aufgaben bearbeiten, wird also die mit den wenigsten Punkten nicht gewertet.

Aufgabe 1: 20 Punkte

Gegeben sei die Kraft $\mathbf{F} = e^x y^3 \sin(z)\mathbf{e}_x + 3e^x y^2 \sin(z)\mathbf{e}_y + e^x y^3 \cos(z)\mathbf{e}_z$.

a) (2 Pkt.) Berechnen Sie $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

b) (4 Pkt.) Berechnen Sie $\nabla \times \mathbf{F}$.

c) (4 Pkt.) Ist $\mathbf{F}$ konservativ? Begründen Sie Ihre Antwort. Wie lautet gegebenenfalls das zugehörige Potential?

d) (5 Pkt.) Sei nun die obige Kraft explizit zeitabhängig, d.h. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$. Hat das einen Einfluss auf Ihr Ergebnis aus c)?

e) (5 Pkt.) Beweisen Sie den Energieerhaltungssatz in einer Dimension für ein einzelnes Teilchen der Masse m, dass sich unter dem Einfluss einer konservativen Kraft $F = F(x)$ bewegt. D.h. zeigen Sie, dass $E = T + V = const$, wobei $T = T(x)$ die kinetische Energie und $V = V(x)$ die potentielle Energie ist des Teilchens ist.

Lösung von Aufgabe 1

a) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 6e^x y \sin(z)$.

b) $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

c) Ja, $\mathbf{F}$ ist konservativ, da $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ genau die Bedingung ist, dass eine Kraft konservativ ist. Das Potential kann aus der Kraft abgelesen oben einfach abgelesen werden:

$$\phi(x, y, z) = -e^x y^3 \sin(z)$$

d) Sobald die Kraft zeitabhängig ist, ist die Kraft nicht mehr konservativ im Allgemeinen (Ausnahmen existieren, z.B. Lorentzkraft). In diesem Fall gilt **nicht**, dass $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$, sondern auf der rechten Seite tritt noch die partielle Ableitung nach der Zeit auf, die zu einer Verletzung der Energieerhaltung führt. Siehe dazu z.B. das Vorlesungsskriptum.

e) $E = const \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$. Es gilt $\frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = m\dot{x}\ddot{x}$ und $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = -F\dot{x}$. Addition der Terme ergibt $\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} - F\dot{x} = (m\ddot{x} - F)\dot{x} = 0$ aufgrund des zweiten Newton'schen Axioms. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 2: 20 Punkte

Vier Gewichte sind in gleichem Abstand a zum gemeinsamen Schwerpunkt an eine masselose Kreuzhantel montiert. Der Schwerpunkt fällt mit dem Ursprung des Koordinatensystems (x, y, z) zusammen (s. Abb. 1). Für die Massen gilt $m_1 = m_3 \equiv M_1$ und $m_2 = m_4 \equiv M_2$, aber $M_1 \neq M_2$.

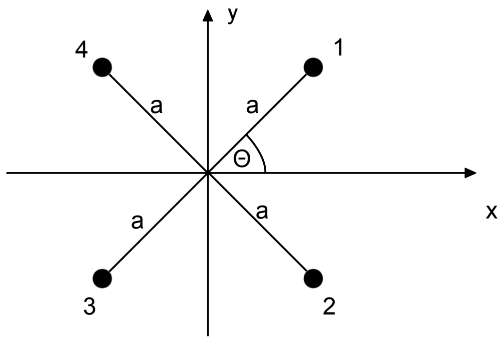

Abb. 1: Veranschaulichung der Aufgabe 1.2. Die z-Achse kommt aus der Bildebene heraus.

a) (5 Pkt.) Bestimmen Sie den Trägheitstensor im Koordinatensystem (x, y, z).

b) (5 Pkt.) Diagonalisieren Sie den Trägheitstensor. Finden Sie Eigenwerte und Eigenvektoren.

c) (5 Pkt.) Wie lautet die Matrix der Hauptachsentransformation? Wie lautet das Koordinatensystem, in dem der Trägheitstensor diagonal ist?

d) (5 Pkt.) Betrachten Sie den Grenzfall $M_1 = M_2$ und interpretieren Sie was passiert.

Bitte wenden.

Lösung von Aufgabe 2

a) Wir wählen Polarkoordinaten (r, θ, z). Die Koordinaten der Massepunkte sind gegeben durch

$$\begin{aligned} 1: &\quad a(\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ 2: &\quad a(\sin\theta, -\cos\theta, 0) \\ 3: &\quad a(-\cos\theta, -\sin\theta, 0) \\ 4: &\quad a(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \end{aligned}$$

Damit folgt aus $\Theta_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{4} m_\alpha (x_\alpha^2 \delta_{ij} - x_{i\alpha} x_{j\alpha})$

$$(\Theta_{ij}) = a^2 \begin{pmatrix} 2(M_1+M_2) - 2M_1\cos^2\theta - 2M_2\sin^2\theta & -2(M_1-M_2)\sin\theta\cos\theta & 0 \\ -2(M_1-M_2)\sin\theta\cos\theta & 2(M_1+M_2) - 2M_1\sin^2\theta - 2M_2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2(M_1+M_2) \end{pmatrix}$$

b) Die Eigenwerte der obigen Matrix sind

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2a^2 M_1 \\ \lambda_2 &= 2a^2 M_2 \\ \lambda_3 &= 2a^2 (M_1 + M_2) \end{aligned}$$

und die zugehörigen normierten Eigenvektoren

$$EV_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad EV_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad EV_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der diagonalisierte Trägheitstensor lautet also

$$\left(\tilde{\Theta}_{ij}\right) = a^2 \begin{pmatrix} 2M_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(M_1 + M_2) \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $\tilde{\Theta} = S\Theta S^T$ wobei S die Matrix ist, die aus den EV besteht, d.h.

$$S = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das neue Koordinatensystem ist gegeben durch $\mathbf{x}' = S\mathbf{x} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\cos\theta - x\sin\theta \\ y\cos\theta + x\sin\theta \\ z \end{pmatrix}.$

d) In Grenzfall $M_1 = M_2$ sieht man, dass der Trägheitstensor aus a) bereits diagonal ist. Es besteht nun eine Symmetrie bezüglich Drehungen um die z-Achse, d.h. jedes KS mit Ursprung im Schwerpunkt, das mit dem alten durch eine Drehung um die z-Achse verbunden ist, ist ebenfalls ein System in dem die Koordinatenachsen Hauptträgheitsachsen (Symmetrie!) sind.

Aufgabe 3: 20 Punkte

Ein Ball wird vom Erdboden aus mit einer Geschwindigkeit v geworfen. θ bezeichne den Abwurfwinkel relativ zum Erdboden.

a) (4 Pkt.) Wie lautet die Bahnkurve des Balls? Stellen Sie die Newton'schen Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie sie.

b) (4 Pkt.) Nach welcher Zeit erreicht der Ball seine maximale Höhe?

c) (6 Pkt.) Berechnen Sie die Länge s der gesamten Flugbahn des Balls als Funktion des Abwurfwinkels θ. Folgendes könnte nützlich sein:

- Substitution $z = \tan\theta - \frac{gt}{v\cos\theta}$ könnte nützlich sein.
- $\int \sqrt{1+z^2}dz = \frac{1}{2}\left(z\sqrt{1+z^2} + \ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)\right)$

d) (6 Pkt.) Welchen Wert muss der Ausdruck $\sin\theta \ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)$ annehmen, damit die Länge der Flugbahn des Balls extremal wird ?

Lösung von Aufgabe 3

a) Es handelt sich um zwei unabhängige Bewegungen. Wir legen im folgenden die x-Achse horizonal und die y-Achse vertikal. In x-Richtung ist die Bewegung gleichmä ssig gleichförmig. In y-Richtung wirkt die Erdbeschleunigung der Bewegung entgegen. Wir legen den Abwurfpunkt in den Koordinatenursprung. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Direkte Integration liefert

$$m\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_{0x}t+s_{0x}\\s_{0y}+v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2\end{pmatrix}$$

Durch die Wahl des Ursprungs haben wir $s_0=(0,0)$. Außerdem gilt $v_{0x}=v\cos\theta$ und $v_{0y}=v\sin\theta$. Man findet also

$$x(t)=vt\cos\theta \quad \text{und} \quad y(t)=vt\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2$$

.

b) $y'(t)=0=v\sin\theta-gt\Rightarrow t_{max}=\frac{v}{g}\sin\theta$.

c) Die Länge der Bahnkurve ist $s=\int_{(0,0)}^{(x_{Landung},0)}ds=2\int_{(0,0)}^{(x(t_{max}),y(t_{max}))}ds$, da die Flugbahn symmetrisch ist um den höchsten Punkt. In t-Parametrisierung findet man $s=2\int_0^{t_{max}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$, d.h.

$$s=2v\cos\theta\int_0^{t_{max}}\sqrt{1+\left(\tan\theta-\frac{gt}{v\cos\theta}\right)^2}dt$$

Das Integral kann mit der obigen Substitution vereinfach werden und man findet

$$\begin{aligned}s&=-\frac{2v^2\cos^2\theta}{g}\int_{z(0)}^{z(t)}\sqrt{1+z^2}dz\\&=\frac{2v^2\cos^2\theta}{g}\left[\frac{1}{2}\left(z\sqrt{1+z^2}+\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\right)\right]_0^{\tan\theta}\\&=\frac{v^2}{g}\left(\sin\theta+\cos^2\theta\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)\right)\end{aligned}$$

d)

$$\frac{ds}{d\theta}=0=\cos\theta-2\cos\theta\sin\theta\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)+\cos^2\theta\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)\frac{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

. Hieraus folgt durch kurze Umformung

$$\sin\theta\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)=1.$$

In anderen Worten: dieser Ausdruck muss eins sein, damit die Flugbahn extremal wird. Man kann desweiteren numerisch zeigen, dass ein globales Minimum bei $\theta=0$, ein lokales Minimum bei $\theta=\frac{\pi}{2}$ und ein lokales Maximum bei $\theta\approx\frac{4}{13}\pi$.

Aufgabe 4: 20 Punkte

Wir betrachten ein masseloses Federpendel mit Federkonstante k. Ein Ende des Pendels ist fixiert und am anderen Ende ist eine Masse m befestigt. Zusätzlich zur Auslenkung der Feder kann das Federpendel auch noch in der vertikalen (x, y)-Ebene schwingen (s. Abbildung 2). Im unausgelenkten Zustand ohne Masse sei die Länge der Feder l.

a) (5 Pkt.) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion auf.

b) (5 Pkt.) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.

c) (4 Pkt.) Zeigen Sie, dass die Ruheposition des Systems gegeben ist durch

$$\theta_0 = 0, \qquad r_0 = l + \frac{mg}{k}.$$

d) (3 Pkt.) Betrachten Sie nun kleine Schwingungen um die Ruheposition, d.h. $\theta \ll 1$ und auch die Dehnung der Feder ist klein. Die Dehnung kann geschrieben werden als $\rho = r_0 - r$ mit $\rho \ll r_0$. Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen um als Funktion von ρ und θ.

e) (3 Pkt.) Um den Gleichgewichtspunkt gilt $\rho \ll r_0$. Wie vereinfachen sich die Gleichungen von d), wenn man desweiteren annimmt, dass $\dot{\theta} \ll 1$ und $\dot{r} \ll 1$?

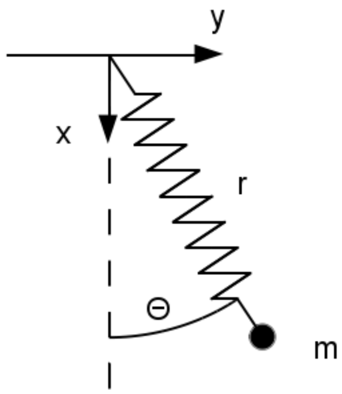

Abb. 2: Veranschaulichung des Federpendels aus Aufgabe 1.4.

Lösung von Aufgabe 4

a) Die verallgemeinerten Koordinaten in diesem Fall sind Polarkoordianten. Der Massepunkt hat die Koordinaten $\mathbf{x}_m = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ und somit $\dot{\mathbf{x}}_m = (-r\dot{\theta}\sin(\theta) + \dot{r}\cos(\theta), r\dot{\theta}\cos(\theta) + \dot{r}\sin(\theta))$. Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}_m \cdot \dot{\mathbf{x}}_m = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right).$$

Die potentielle Energie setzt sich zusammen aus zwei Beiträgen (wobei die potentielle Energie verursacht durch die Schwerkraft nun so gewählt ist, dass sie null ist bei $x = 0$)

$$V = \frac{1}{2} k (r - l)^2 - mgr\cos\theta.$$

und somit ist die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2} k (r - l)^2 + mgr\cos\theta.$$

b) Die Bewegungsgleichungen können leicht abgelesen werden:

$$r: \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + k(r-l) - mg\cos\theta = 0$$

$$\theta: \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

c) In der Ruheposition verschwinden erste und zweite Ableitungen von r und θ. Die Bewegungsgleich für θ wird zu

$$\theta: \quad g\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0.$$

Dies benutzend findet man aus der Bewegungsgleichung für r

$$r: \quad k(r-l) - mg = 0 \Rightarrow r_0 = l + \frac{mg}{k}.$$

d) Für $\rho = r - r_0$ findet man $\dot{r} = \dot{\rho}$ und $\ddot{r} = \ddot{\rho}$. Desweiteren gilt um $\theta = 0$ $\sin\theta \sim \theta$ und $\cos\theta \sim 1$. Damit und mit $\rho \ll r_0$ werden die Bewegungsgleichungen

$$\theta: \quad (r_0 + \rho)\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + g\theta = 0$$

$$r: \quad m\ddot{\rho} - m(r_0+\rho)\dot{\theta}^2 + k\rho = 0,$$

e) Die Gleichungen vereinfachen sich weiter. Sowohl $\dot{r}$ als auch $\dot{\theta}$ sind klein, d.h. man kann alle Terme, die die verallg. Geschwindigkeiten erhalten, weglassen und man findet

$$\theta: \quad r_0\ddot{\theta} + g\theta = 0 \quad \text{mit} \quad w = \sqrt{\frac{g}{r_0}}$$

$$r: \quad m\ddot{\rho} + k\rho = 0 \quad \text{mit} \quad w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Es handelt sich in dieser Näherung also um unabhängige harmonische Schwingungen.

Aufgabe 5: 20 Punkte

Eine homogene Vollkugel der Masse m, Dichte $\rho = m/(\frac{4}{3}\pi a^3)$ und Radius a rollt mit der Geschwindigkeit v entlang einer Ebene und kollidiert unelastisch mit einer Stufe der Höhe h, d.h. die Kugel "rollt die Stufe hinauf" und verliert keine Energie durch Reibung oder Verformung. Es gilt $h < a$. Der Kollisionspunkt heiße A. Wir nehmen weiter an, dass die Kugel nicht durchdrehen kann (s. Abb. 3).

Anmerkung: Leider hat sich ein Fehler in die Aufgabe eingeschlichen und Aufgabe 5b) ist so nicht korrekt. Dies wurde bei der Bewertung allerdings berücksichtigt, sodass es nicht zu Punkteabzug führte, wenn damit die c) ausgerechnet wurde.

a) (5 Pkt.) Wie lautet das Trägheitsmoment einer Vollkugel, die sich um eine Achse durch Ihren Mittelpunkt dreht?

b) (7 Pkt.) Zeigen Sie, dass die Winkelgeschwindigkeit ω' nach der Kollision gegeben ist durch

$$\omega' = \left(1 - \frac{5h}{7a}\right)\frac{v}{a}.$$

c) (8 Pkt.) Wie groß muss v sein, damit die Vollkugel über die Stufe kommt? Finden Sie v als Funktion von h und a.

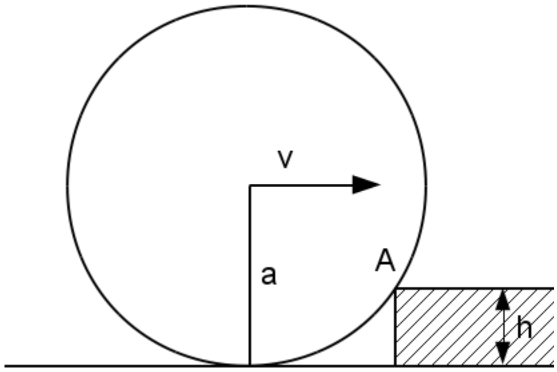

Abb. 3: Veranschaulichung der Aufgabe 1.5.

Lösung von Aufgabe 5

a) Aus Symmetriegründen gilt $I_x = I_y = I_z \equiv I$. Man findet für die z-Komponente:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_V \rho(x^2+y^2)dV = \rho \int_V r^2 \sin^2\theta r^2 dr\ d(\cos\theta)d\phi \\ &= \frac{1}{5}a^5 2\pi \frac{m}{4/3\pi a^3}\int_{-1}^{1}(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta) = \frac{2}{5}ma^2 \end{aligned}$$

b) Es gilt Energieerhaltung vor und nach der Stufe, d.h.

$$E_{kin} + E_{rot} = E_{pot} + E'_{kin} + E'_{rot} \tag{1}$$

mit

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh + \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}M\omega'^2 \tag{2}$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit vor und ω' nach dem Zusammenprall bezeichnet. Analog ist v die Geschwindigkeit des Schwerpunkts vor und v' nach der Kollision. I ist das in a) berechnete Trä gheitsmoment. Da es kein Durchdrehen gibt, gilt $v = \omega a$. Dies benutzend findet man aus der obigen Formel

$$\omega'^2 = \left(1 - \frac{10}{7}\frac{gh}{v^2}\right)\frac{v^2}{a^2} \tag{3}$$

c) Die Geschwindigkeit der Kugel ist mimimal, wenn sie oben auf der Kante stehenbleibt. D.h. um die minimale Geschwindkeit zu erhalten, muss man Gleichung (3) gleich null setzen. Es muss gelten:

$$0 \le 1 - \frac{10gh}{v^2} \Rightarrow v^2 \ge \frac{10}{7}gh$$