Klausur zur T1: Theoretische Mechanik, SoSe2014
Prof. Dr. Dieter Lüst — Dr. Reinke Sven Isermann
Theresienstr. 37, Zi. 425 — Reinke.Isermann@lmu.de

Nachklausur - Theoretische Mechanik für Bachelor (T1)

Hinweise:

- **Sie haben 120 Minuten Zeit.**
- **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Namen und Matrikel.**
- **Es gehen nur die vier besten Aufgaben in die Wertung ein.**
- **Schreiben Sie leserlich und schreiben Sie Ihre Lösungen logisch nachvollziehbar auf!**

Name	Vorname	Matrikel

1	2	3	4	5	$\sum_{\text{beste 4 Aufgaben}}$

Aufgabe 1: 20 Punkte

Gegeben sei das Potential

$$\phi(x, y, z) = \beta(1 + \sin x)^2 y^z \quad \text{mit} \quad \beta = const.$$

a) (2 Pkt.) Welche Einheit hat ein Potential im SI-System?

b) (4 Pkt.) Berechnen Sie die durch dieses Potential verursachte Kraft $\mathbf{F}$.

c) (4 Pkt.) Berechnen Sie $\nabla \times \mathbf{F}$.

d) (4 Pkt.) Berechnen Sie die Arbeit, die nötig ist, um von $P_1 = (\frac{\pi}{2}, 1, 1)$ nach $P_2 = (\pi, 3, 3)$ zu gelangen.

e) (6 Pkt.) Setzen Sie nun $\beta = 1$ und betrachen Sie das Potential $\phi(x, 1, 1) = (1 + \sin x)^2$, d.h. eine effektive eindimensionale Potentiallandschaft dargestellt in Abbildung 1. Es gilt $x \in \mathbb{R}$. In dieser Potentiallandschaft bewege sich ein Teilchen der Masse m und der Energie E. Beschreiben Sie das Potential und die möglichen Bewegungen des Teilchens im Bereich $[-\infty, \infty]$ für die Fälle $E > 4$, $E < 4$ und $E = 4$.

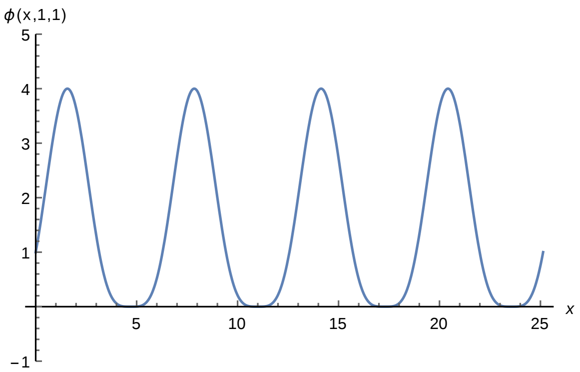

Abb. 1: Eindimensionale Potentiallandschaft $\phi(x, 1, 1)$ dargestellt im Interval $x \in [0, 8\pi]$.

Lösung von Aufgabe 1

a) Die Einheit des Potentials ist gegeben durch $[kgm^2/s^2] \equiv [Joule]$.

b) $\mathbf{F} = -\nabla\phi = -\beta \begin{pmatrix} 2y^z \cos x(1+\sin x) \\ y^{-1+z} z(1+\sin x)^2 \\ y^z \log y(1+\sin x)^2 \end{pmatrix}$

c) $\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla\phi = 0$. Alternativ durch Brute-Force Rechnung.

d) Da wir es mit einer konservativen Kraft zu tun haben, ist die Wahl des Weges von P_1 nach P_2 irrelevant. Wir können direkt schreiben $W = V(P_1) - V(P_2)$.Wir finden $W = -(27-4)\beta = -23\beta$

e) Das Potential ist 2π-periodisch. Seine Minima liegen bei $x_{min} = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Seine Maxima liegen bei $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ Seine Höhe beträgt maximal 4.
   - $E > 4$: Das Teilchen kann sich frei bewegen im Bereich $[-\infty, \infty]$.
   - $E < 4$: Das Teilchen kann sich nur in der Potentialsenke bewegen in der es sich befindet und in kein anderes gelangen.
   - $E = 4$: Das Teilchen trifft in seiner Bewegung auf eins der Maxima (welches abhängig vom Startpunkt und Bewegungsrichtung) und kommt dort zum Stillstand (instabiles Maximum). Genaugenommen, ist die Zeit, die das Teilchen benötigt um auf dem Maximum anzukommen $t \to \infty$.

Aufgabe 2: 20 Punkte

Eine Perle der Masse m kann sich frei und ohne Reibung auf einem Kreisring mit Radius r bewegen. Die Ringebene liegt horizontal. Der Kreisring dreht sich außerdem ebenfalls horizontal mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω im Abstand R um einen Drehpunkt (s. Abb 2.). R ist also der Abstand Drehpunkt zu Mittelpunkt des Kreisrings. Es wirkt keine Schwerkraft.

a) (4 Pkt.) Wie lautet die Zwangsbedingung für die Bewegung der Perle? Wie viele verallgemeinerte Koordinaten brauchen Sie zur Beschreibung dieses Problems?

b) (6 Pkt.) Leiten Sie die Lagrange-Funktion her und geben Sie die Koordinaten an, die Sie nutzen (z.B. durch Einzeichnen / Markieren im untenstehenden Bild).

c) (4 Pkt.) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.
Hinweis: $\sin A \sin(A+B) + \cos A \cos(A+B) = \cos B$.

d) (2 Pkt.) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für den Fall $\theta \ll 1$?

e) (4 Pkt.) Bestimmen Sie aus dem Ergebnis in c) die Ruhepositionen der Perle.

Lösung von Aufgabe 2

a) Die Zwangsbedingung lautet $r = const$. Man braucht eine verallgemeinerte Koordinate. Eine geeignete Koordinatenwahl ist der Winkel θ wie im Bild eingezeichnet. Der Ursprung ist so gewählt, dass er im Drehpunkt liegt.

b) Wir definieren die Winkel ωt und θ so wie in Abb. 2. und legen den Ursprung in den Drehpunkt. Dann sind die kartesischen Koordinaten gegeben als

$$(x, y) = (R\cos\omega t + r\cos(\omega t + \theta), R\sin\omega t + r\sin(\omega t + \theta))\,.$$

Entsprechend ist die Geschwindigkeit

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \Big(-\omega R\sin\omega t - r(\omega + \dot{\theta})\sin(\omega t + \theta), \omega R\cos\omega t + r(\omega + \dot{\theta})\cos(\omega t + \theta)\Big)\,.$$

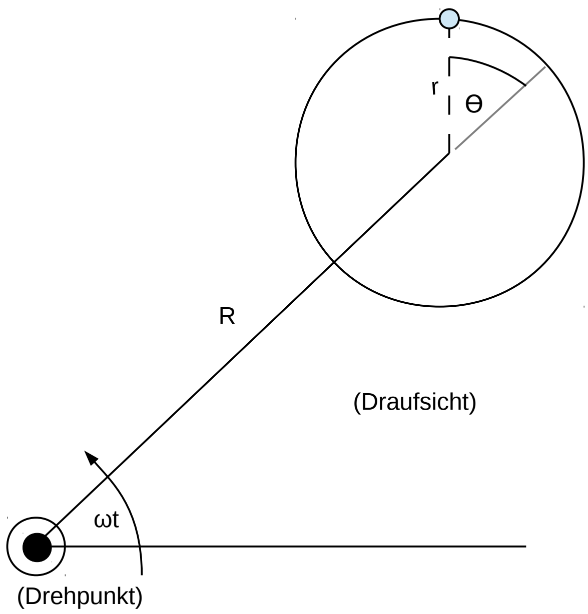

Abb. 2: Illustration zu Aufgabe 2. Der Winkel θ ist im mathematischen Sinne positiv gewählt.

und der Betrag

$$v^2 = R^2\omega^2 + r^2(\omega+\dot\theta)^2 + 2Rr\omega(\omega+\dot\theta)\underbrace{(\sin\omega t\sin(\omega t+\theta)+\cos\omega t\cos(\omega t+\theta))}_{=\cos\theta}.$$

In diesem Fall gibt es keinen potentiellen Anteil, da sich das Problem in einer horizontalen Ebene abspielt, d.h. $V = const$ und die Lagrangefunktion ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(R^2\omega^2 + r^2(\omega+\dot\theta)^2 + 2Rr\omega(\omega+\dot\theta)\cos\theta\right)$$

c) Es gibt nur einen Freiheitsgrad (θ), d.h. nur eine Bewegungsgleichung gegeben durch

$$r\ddot\theta + R\omega^2\sin\theta = 0.$$

d) $r\ddot\theta + R\omega^2\theta = 0$. (Harmonischer Oszillator).

e) Gleichgewicht ist gegeben bei $\ddot\theta = 0 = \dot\theta$, d.h. die Gleichung aus c) verschwindet, wenn $\sin\theta = 0$. Es muss daher gelten $\theta = 0 \quad \text{und} \quad \theta = \pi$.

Aufgabe 3: 20 Punkte

Ein Ball wird mit einer Geschwindigkeit v von der Kante eines Abgrundes der Höhe h geworfen unter einem Winkel θ. Es wirkt die Gravitionsbeschleunigung $g = const$ senkrecht nach unten. Nehmen Sie an, dass der Boden unterhalb des Abhangs horizontal ist.

a) (3 Pkt.) Stellen Sie die Newton'schen Bewegungsgleichungen auf und geben Sie die Anfangsbedingungen dieses Problems an.

b) (3 Pkt.) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.

c) (4 Pkt.) Nach welcher Zeit t schlägt der Ball auf dem Boden auf?

d) (6 Pkt.) Wie groß sollte der Abwurfwinkel θ sein, sodass die horizontale Wurfweite maximal ist? In anderen Worten: Bestimmen Sie $\sin\theta_{max}$.

Hinweis: Die Beziehung $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ und die Substitution $\lambda = 1 - 2\sin^2\theta$ könnten hilfreich sein.

e) (4 Pkt.) Wie groß ist die maximale horizontale Wurfweite?

Lösung von Aufgabe 3

a) Sei x die horizontale Achse und y die vertikale Achse. Der Nullpunkt ist so gewählt, dass die initiale Position des Balls gegeben ist durch $(x_0, y_0) = (0, h)$. Die Initialgeschwindigkeit ist $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}$. Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix},$$

wobei g die Gravitationsbeschleunigung ist.

b) Direktes Aufintegrieren liefert unter Benutzung der Initialbedingungen aus a)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\theta t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + vt\sin\theta + h \end{pmatrix}$$

c) Der Ball landet nach $y(t_f) = 0$. Die Lösung der quadratischen Gleichung ist gegeben durch

$$t_f = \frac{v}{g}\left(\sin\theta \pm \sqrt{\sin^2\theta + 2\frac{hg}{v^2}}\right).$$

Die physikalisch sinnvolle Lösung hier ist die +-Lösung (die andere Lösung ist negativ).

d) Die horizontale Wurfweite nach t_f ist

$$x(t_f) = v\cos\theta t_f = \frac{v^2}{g}\cos\theta\left(\sin\theta \pm \sqrt{\sin^2\theta + 2\frac{hg}{v^2}}\right).$$

Ableiten und Umformen ergibt

$$\frac{dx(t_f)}{d\theta} = 0 \rightarrow (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sqrt{\sin^2\theta + 2\frac{hg}{v^2}} = \sin\theta(2\frac{hg}{v^2} - (\cos^2\theta - \sin^2\theta))$$

Nun kann man $\cos^2\theta$ ersetzen durch $1 - \sin^2\theta$ und nach $\sin\theta^2$ auflösen. Man erhält zwei Lösungen

$$\sin\theta_{max} = \pm\frac{1}{\sqrt{2 + 2\frac{hg}{v^2}}}.$$

Die negative Lösung können wir verwerfen, da sie einem Abwurfwinkel $> \pi/2$ entspricht (Wurf nach hinten).

e) Aus der vorangegangenen Rechnung folgt, dass die maximale Distanz gegeben ist mit

$$x(t_f)|_{\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2+2\frac{2hg}{v^2}}}} = \frac{v^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2}}$$

Aufgabe 4: 20 Punkte

Gegeben sei ein homogener Kegel wie dargestellt in Abbildung 3 der Höhe h und Radius R der Grundfläche und Masse M.

a) (5 Pkt.) Berechnen Sie explizit in geeigneten Koordinaten das Volumen des Kegels mit dem Radius R und der Höhe h.

b) (5 Pkt.) Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes des Kegels.

c) (5 Pkt.) Berechnen Sie die Komponenten $\theta'_{11}, \theta'_{22}$ und θ'_{33} des Trgheitstensors bezogen auf das Koordinatesystem O'. *Hinweis:* $\int \cos^2\phi d\phi = \pi$.

d) (5 Pkt.) Wie lauten die Komponenten des Trägheitstensors θ_{11}, θ_{22} und θ_{33} bezogen auf den Schwerpunkt, der im Ursprung des Koordinatensystem O liegt?

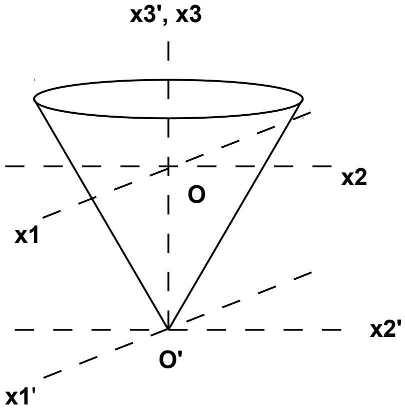

Abb. 3: Illustration von Aufgabe 4.

Lösung von Aufgabe 4

Wir wählen Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z), d.h $x'_1 = r\cos\phi$, $x'_2 = r\sin\phi$ und $x'_3 = z$. Bevor wir rechnen, ist es nötig festzustellen, dass r und z die folgende Gleichung erfüllen auf dem Rand des Kegels $r = \frac{R}{h}z$, d.h. die Radialkomponente hängt bei Integrationen von z ab.

a) Das Volumen ist

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{\frac{R}{h}z} r d\phi dz dr = 2\pi\int_0^z \frac{1}{2}r^2|_0^{\frac{R}{h}z} dz = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

b) Der Schwerpunkt liegt aus Symmetriegründen nur auf der $x_3 = z$-Achse. Der Schwerpunkt auf z folgt dann aus $z_{SP} = \frac{1}{V_{Kegel}}\int zdV$ Eine Rechnung analog zu davor liefert $z_{SP} = \frac{3}{4}h$ vom Scheitelpunkt des Zylinders aus gesehen.

c) $\theta'_{ij} = \int \frac{M}{V}\left(x'^2\delta_{ij} - x'_i x'_j\right) dV$. Aus Symmetrie folgt zunächst, dass $\theta'_{11} = \theta'_{22}$. Es ist gegeben durch

$$\theta'_{11} = \int \frac{M}{V}(r^2 + z^2 - r^2\cos^2\phi) r dz dr d\phi.$$

Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung folgt durch Ausrechnen

$$\theta'_{11} = \theta'_{22} = \frac{3}{5}\left(h^2 + \frac{R^2}{4}\right)M$$

. Analog gilt für $\theta'_{33} = \int \frac{M}{V}(r^2 + z^2 - z^2) r dz dr d\phi = \frac{3}{10}MR^2$

d) Um diese Teilaufgabe zu lösen bedienen wir uns des Satz' von Steiners. Dieser besagt, dass das Trägheitsmoment eines Körpers um eine Drehachse gegeben ist durch das Träheitsmoment um den Schwerpunkt plus einen "Verschiebungsterm"

$$\theta' = \theta + Md^2$$

wobei d der Abstand Schwerpunkt - Drehachse ist. In diesem Fall ist $d = \frac{3}{4}h$ wie bereits berechnet. In der letzten Aufgabe haben wir haben θ' bereits berechnet, d.h. wir können einfach den Satz nach den Trägheitsmomenten um den Schwerpunkt umstellen. Man findet

$$\theta_{33} = \theta'_{33} = \frac{3}{10} M R^2 \quad \theta_{11} = \theta_{22} = \theta'_{11} - M a^2 = \frac{3}{20} M \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right)$$

Aufgabe 5: 20 Punkte

Im (reduzierten) Zweikörperproblem sind Energie E und Drehimpuls L erhaltene Größen. Sie sind gegeben durch

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = const, \tag{1}$$

$$L = \mu r^2 \dot{\phi} = const, \tag{2}$$

μ ist die reduzierte Masse und r die radiale Koordinate. Der Punkt über einer Größe ist hier zu verstehen als Ableitung nach der Zeit.

a) (4 Pkt.) Beweisen Sie, dass Gleichung (1) geschrieben werden kann als

$$\mu \ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{dV}{dr}. \tag{3}$$

b) (5 Pkt.) Führen Sie die folgende Koordinatentransformation durch $r = \frac{1}{u}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\dot{r} = -\frac{L}{\mu}\frac{du}{d\phi} \tag{4}$$

c) (5 Pkt.) Nun definieren Sie außerdem $F(r) = -\frac{dV}{dr}$. Zeigen Sie, dass sich Gleichung (3) schreiben lässt als

$$\frac{L^2 u^2}{\mu}\left(\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u\right) = -F\left(\frac{1}{u}\right) \tag{5}$$

d) (6 Pkt.) Sei nun die Bahnkurve des Zweikörperproblems gegeben durch $r(\phi) = a\cos(3\phi)$ mit $a > 0$. Bestimmen Sie die Zentralkraft $F(r)$, die diese Bewegung hervorruft aus Gleichung (5), d.h. geben Sie das Ergebnis als Funktion von r!

Lösung von Aufgabe 5

a) Ableiten der Gleichung (1) nach der Zeit liefert

$$0 = \frac{dE}{dt} = \mu \dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3}\dot{r} + \frac{dV(r)}{dt}.$$

Es gilt $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\dot{r}$. Teilen durch $\dot{r}$ und umstellen der Gleichung liefert (3).

b) $\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \frac{d\frac{1}{u}}{dt} = -\frac{1}{u^2}\dot{u}$. u ist eine Funktion von ϕ, d.h. $\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\phi}\dot{\phi}$. Zusammen mit (2) folgt dann die Behauptung.

c) Es gilt $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}$. Einsetzen der Lösung aus b) und (2) liefert:

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{\mu^2}u^2\frac{d^2 u}{d\phi^2}.$$

Dies setzt man nun in (3) ein und ersetzt r mit $\frac{1}{u}$ und $\frac{dV}{dr}$ mit $-F(1/u)$. Umformen liefert dann das Ergebnis.

d) Es gilt

$$u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)} = \frac{1}{a\cos(3\phi)}$$

und damit

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{3}{a}\frac{\tan(3\phi)}{\cos(3\phi)}$$

und

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{9}{a}\frac{(1+\sin^2(3\phi))}{\cos^3(3\phi)} = 9\frac{(2a^2-r^2)}{r^3}.$$

Einsetzen in (5) liefert

$$F(r) = \frac{2L^2}{\mu}\left(\frac{4}{r^3} - \frac{9a^2}{r^5}\right).$$