Repetitorium E: Hamiltonsche Mechanik

Mo-Fr, 21-25.09.2015; Tutor: Konstantin Merz

Aufgabe 1: Kanonische Transformation für schwach anharmonischen Oszillator [8]

Betrachten Sie die Hamilton-Funktion

$$H(p,q) = \tfrac{1}{2}(q^2 + p^2) + \lambda q^3, \qquad \lambda \ll 1. \tag{1}$$

Die ersten beiden Terme beschreiben einen harmonischen Oszillator (Masse $m = 1$, Frequenz $\omega = 1$). Der dritte Term, kubisch in q, beschreibt eine "schwache" ($\lambda \ll 1$) Anharmonizität. In dieser Aufgabe soll die Lösung $q(t)$ und $p(t)$ der kanonischen Bewegungsgleichungen zur Ordnung $\mathcal{O}(\lambda)$ bestimmt werden. Dazu wird die Hamilton-Funktion mittels einer kanonischen Transformation in die Form

$$\tilde{H} = \tfrac{1}{2}(Q^2 + P^2) + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{2}$$

gebracht. Werden nun die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^2)$ vernachlässigt, lassen sich die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für $Q(t)$ und $P(t)$ einfach lösen, was dann auch die gesuchte Lösung für $q(t)$ und $p(t)$ zur Ordnung $\mathcal{O}(\lambda)$ liefert.

(a) [3] Betrachten Sie eine Variablentransformation der Form

$$q(Q,P) = Q + aQ^2 + bP^2, \qquad p(Q,P) = P + cQP, \tag{3}$$

wobei die Konstanten a, b und c alle von Ordnung $\mathcal{O}(\lambda)$ seien. Berechnen Sie die Poisson-Klammer $\{q,p\}_{Q,P}$ bis zur Ordnung $O(\lambda)$. Wie muss c von a und b abhängen, damit (3) zur Ordnung $\mathcal{O}(\lambda)$ eine *kanonische* Transformation ist?

(b) [3] Wenden Sie die so bestimmte kanonische Transformation (3) auf den anharmonischen Oszillator (1) an. Wie müssen nun die Konstanten a, b und c von λ abhängen, damit die Hamilton-Funktion $H(q(Q,P), p(Q,P))$ die Form (2) annimmt, in der *keine* Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda)$ vorkommen? *Hinweis:* Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^2)$ brauchen Sie nicht explizit aufzuschreiben, da sie im Folgenden zu vernachlässigen sind.

(c) [1] Wie lauten die Hamilton-Gleichungen für die neuen Variablen Q und P? Lösen Sie diese, d.h. geben Sie $Q(t)$ und $P(t)$ in Abhängigkeit von $Q_0 = Q(0)$ und $P_0 = P(0)$ an.

(d) [1] Nachdem nun die Lösung für $Q(t)$ und $P(t)$ bekannt ist, lassen sich mittels Gl. (3) auch $q(t)$ und $p(t)$ bestimmen. Das brauchen Sie hier nicht explizit vorzurechnen. Diskutieren Sie jedoch qualitativ, wie sich die Anharmonizität auf die Lösungen $q(t)$ und $p(t)$ auswirkt – mit welcher Frequenz oszillieren die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda)$?

Aufgabe 2: Kanonische Transformation für harmonischen Oszillator mit pq-Term [6]

Ein Massenpunkt (einfachheitshalber mit Masse $m = 1$) bewege sich in einer Dimension mit Koordinate q und Impuls p. Seine Dynamik sei durch die Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \tfrac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + \alpha pq$$

beschrieben, wobei ω und α positive Konstanten sind.

(a) [1] Stellen Sie die Hamilton-Gleichungen für $\dot{q}$ und $\dot{p}$ auf.

(b) [1] Leiten Sie zunächst die Gleichung für $\dot{q}$ noch einmal nach der Zeit ab. Eliminieren Sie nun p und $\dot{p}$, und zeigen Sie, dass die resultierende Bewegungsgleichung für $q(t)$ die Form $\ddot{q} + \Omega^2 q = 0$ hat. Wie hängt Ω^2 von ω und α ab?

(c) [1] Die Anfangswerte der Bewegung seien $q(0) = 0$ und $\dot{q}(t) = v_0 > 0$. Skizzieren Sie die Lösung $q(t)$ der Bewegungsgleichung für jeden der folgenden drei Fälle: (i) $\Omega^2 > 0$; (ii) $\Omega^2 = 0$; (iii) $\Omega^2 < 0$. (Formeln für die Lösungen brauchen nict angegeben zu werden.)

Als alternativen Lösungsansatz betrachten wir im Folgenden eine kanonische Transformation zu neuen Variablen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{P}$. Die Erzeugende habe die Form

$$F_2(q,\mathcal{P}) = q\mathcal{P} - \tfrac{1}{2}Aq^2 \ ,$$

wobei die Konstante A noch zu bestimmen ist.

(d) [1] Geben Sie $q = q(\mathcal{Q},\mathcal{P})$ und $p = p(\mathcal{Q},\mathcal{P})$ explizit an.

(e) [1] Bestimmen Sie die transformierte Hamilton-Funktion $K(\mathcal{Q},\mathcal{P})$. Wie muß A gewählt werden, damit K keine gemischten Terme der Form $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ enthält? Geben Sie $K(\mathcal{Q},\mathcal{P})$ für diese Wahl von A an.

(f) [1] Stellen Sie (für die in (e) getroffene Wahl von A) die kanonischen Bewegungsgleichungen für $\dot{\mathcal{Q}}$ und $\dot{\mathcal{P}}$ auf. Finden Sie auch eine Gleichung für $\ddot{\mathcal{Q}}$. Unterscheidet sich die Form dieser Gleichung von jener für $\ddot{q}$ aus Aufgabe (2b). Warum?

Aufgabe 3: Schiefer Wurf [9]

Wir betrachten ein 2-dimensionales System mit Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ und Impulsen $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ und zeitunabhängiger Hamilton-Funktion $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$. In der Hamilton-Jakobi-Theorie wird $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$ mittels einer Erzeugenden der Form $F_2 = S(\mathbf{q},\mathbf{P},t)$ in eine neue Hamilton-Funktion $\tilde{H}(\mathbf{Q},\mathbf{P})$ transformiert, wobei F_2 so zu wählen ist, dass $\tilde{H} := 0$ identisch gilt. Folglich sind die neuen Koordinaten und Impulse Erhaltungsgrößen, $\mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2) = \text{konst}$, $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\beta_2) = \text{konst}$.
Die Hamilton-Jakobi-Gleichung für die Erzeugende S lautet dann

$$H(\mathbf{q},\, \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,. \tag{4}$$

Ferner gelten die Transformationsgleichungen

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}\,, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\ . \tag{5}$$

(a) [1] Ein Teilchen der Masse m mit kartesischen Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ bewege sich in 2 Dimensionen unter Einfluss der Schwerkraft, die in die negative q_2-Richtung zeige. Wie lautet die Hamilton-Funktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$?. Existieren zyklische Koordinaten?

(b) [2] Wählen Sie zur Behandlung dieses Systems mittels Hamilton-Jakobi-Theorie folgenden Separationsansatz für die Erzeugende:

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1 q_1 + W'(q_2; \boldsymbol{\alpha}) - \alpha_2 t \; . \tag{6}$$

Stellen Sie mittels der Hamilton-Jakobi-Gl. (4) für S eine Differentialgleichung für W' auf. Zeigen Sie, dass deren Lösung folgende Form hat [die auftretende Integrationskonstante kann gleich Null gesetzt werden]:

$$W'(q_2, \boldsymbol{\alpha}) = \mp \frac{1}{2gm^2} \frac{2}{3} \left[2m(\alpha_2 - mgq_2) - \alpha_1^2 \right]^{3/2} \; . \tag{7}$$

(c) [2] Stellen Sie die oben angegebenen Gleichungen für $Q_i = \beta_i$ explizit auf. Zeigen Sie mittels der Gleichung für β_2 folgenden Zusammenhang:

$$\left[2m(\alpha_2 - mgq_2) - \alpha_1^2 \right]^{1/2} = \mp mg(\beta_2 + t) \; . \tag{8}$$

(d) [1] Finden Sie (mittels Gl. (8), und der in (c) erhaltenen Gleichung für β_1) die Zeitabhängigkeit der alten Koordinaten, $q_i = q_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t)$.

(e) [1] Finden Sie mittels Gleichung (5) für p_i die Zeitabhängigkeit der Impulse, $p_i = p_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t)$.

(f) [2] Betrachten Sie folgende Anfangsbedingungen bei $t = 0$:

$$q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = h, \quad p_1(0) = p_0, \quad p_2(0) = 0 \; . \tag{9}$$

Drücken Sie die Erhaltensgrößen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ und β_2 durch h und p_0 aus. Welche physikalische Interpretation haben α_1 und α_2?

Aufgabe 4: Geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld [10]

Die Lagrange-Funktion für ein geladenes Teilchen (Masse $m = 1$, Ladung $e = 1$) in der q_1-q_2-Ebene, senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld der Stärke B, lautet

$$L = \frac{1}{2} \left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + (q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1) B \right] \tag{10}$$

(a) [2] Zeigen Sie, ausgehend von L, dass die Hamilton-Funktion folgende Form hat:

$$H(q_1, q_2; p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1 + q_2 B/2)^2 + \frac{1}{2}(p_2 - q_1 B/2)^2 \; . \tag{11}$$

(b) [2] Betrachten Sie nun eine kanonische Transformation von den alten Variablen (q_1, q_2, p_1, p_2) zu neuen Variablen (Q_1, Q_2, P_1, P_2), gegeben durch

$$q_1 = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2 \right] , \qquad p_1 = \frac{\alpha}{2} \left[\sqrt{2P_1} \cos Q_1 - Q_2 \right] , \tag{12a}$$

$$q_2 = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{2P_1} \cos Q_1 + Q_2 \right] , \qquad p_2 = \frac{\alpha}{2} \left[-\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2 \right] . \tag{12b}$$

Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{q_1, p_1\}_{Q,P}$. Ist Ihr Ergebnis konsistent mit der Behauptung, dass die Transformation (12) kanonisch ist?

(c) [2] Wählen Sie nun $\alpha = \sqrt{B}$. Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion, ausgedrückt durch die neuen Variablen, $H(q_1, q_2; p_1, p_2) =: \tilde{H}(Q_1, Q_2; P_1, P_2)$, die Form $\tilde{H} = \omega P_1$ hat, und bestimmen Sie ω.

(d) [2] Lösen Sie die kanonischen Hamilton-Gleichungen für die neuen Variablen als Funktion der Zeit, mit den Anfangsbedingungen $P_1(0) = \alpha^2 r^2/2$ und $Q_1(0) = Q_2(0) = P_2(0) = 0$ bei $t = 0$ (r ist eine Konstante).

(e) [2] Bestimmen Sie, durch Einsetzen des Ergebnisses von Teilaufgabe (d) in Gl. (12), die Bahn des Teilchens, $q_1(t)$ und $q_2(t)$, und skizzieren Sie diese Bahn qualitativ in der q_1-q_2-Ebene. Was ist die physikalische Bedeutung des Parameters r?

Aufgabe 5: Hamilton-Funktion eines Teilchens im rotierenden Bezugssystem [1]

Ein Massenpunkt mit Masse m bewege sich in einem Potential $V(\mathbf{r})$ in einem gleichförmig rotierenden Bezugssystem, dessen Rotation durch den zeitunabhängigen Winkelgeschwindigkeitsvektor $\mathbf{\Omega}$ charaktarisiert wird (d.h. Rotationsachse ist parallel zu Ω, Winkelgeschwindigkeit ist $|\mathbf{\Omega}|$). Wir schreiben $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{r}'(t)$ für die Ortsvektoren des Massenpunktes in einem raumfesten Inertialsystem bzw. einem mitrotierendem (beschleunigten) Bezugsystem. Die entsprechenden Geschwindigkeiten sind verknüpft über $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \Omega \times \mathbf{r}'$.

(a) Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion für das Teilchen folgende Form hat:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{p}) + V(\mathbf{r}') \,. \tag{13}$$

(b) Ein geladenes Teilchen bewege sich in einem Magnetfeld, welches von einem unendlich langen, infinitesimal dünnen, geraden, stromdurchflossenen Draht erzeugt wird. Das Vektorpotential ist in diesem Fall durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{qI}{c^2} \log\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \mathbf{e}_z \tag{14}$$

gegeben, wobei R eine beliebige Länge und $r^2 = x^2 + y^2$ in Zylinderkoordinaten ist. Die dazugehörige Lagrange-Funktion (ggf. mit externem Potential V) lautet dann

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} - V(\mathbf{r}). \tag{15}$$

Konstrurieren Sie die entsprechende Hamilton-Funktion. Erkennen Sie Gemeinsamkeiten mit derjenigen aus Teil (a)?

[Gesamtpunktzahl Aufgaben: 34]
