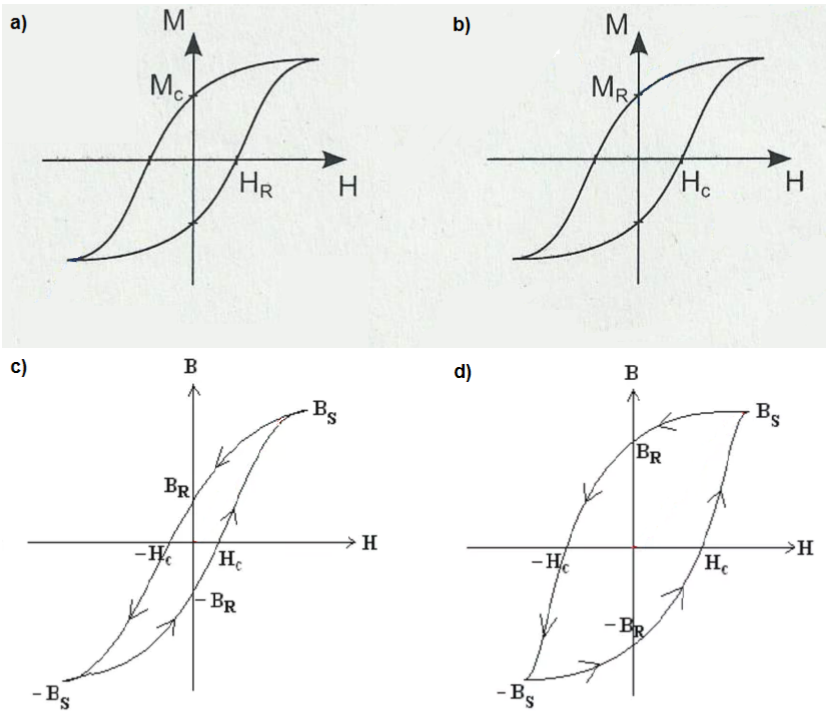
Übungsblatt Elektrodynamik 6

Besprechung in der Woche vom 09.07.18 bis 13.07.18

Teil A: Verständnisaufgaben

Aufgabe 1 – Hysterese

Welche der folgenden Abbildungen *von a) bis d)* zeigt eine korrekte Hysteresekurve eines schwach ferromagnetischen Materials?
Alle dargestellten Diagramme sind punktsymmetrisch zum Ursprung. Der Index R bedeutet „remanent“ und der Index C bedeutet „koerzitiv“.



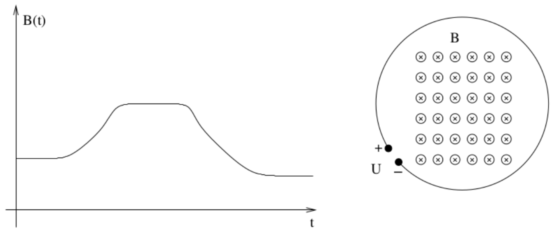
Beschreiben Sie kurz, warum das Phänomen der Hysterese ein Problem beim sicheren Löschen von Daten spielen kann. Wie kann man Daten, die auf einer magnetischen Festplatte gespeichert wurden, sicher löschen (so, dass man sie nicht mehr wiederherstellen kann)? Nennen Sie mindestens 3 Möglichkeiten.

Aufgabe 2 – LC-Schwingkreis*

Die maximale Spannung an einem Kondensator in einem LC-Schwingkreis sei 17 V und die maximale Energie auf dem Kondensator sei 160 µJ. Zu einem bestimmten Zeitpunkt habe dieser Kondensator die Spannung 5 V und die Energie 10 µJ. Wie groß sind zu diesem Zeitpunkt die (a) die Spannung an der Spule und (b) die Energie des magnetischen Felds?
Hinweis: Die Aufgabe kann mit den ursprünglichen Angaben gelöst werden, diese sind allerdings nicht ganz konsistent. Für eine konsistente Aufgabenstellung ersetzen Sie die maximale Spannung mit 20 V (statt 17 V).

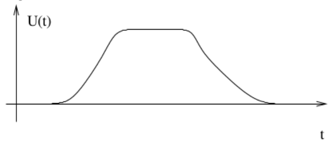
Aufgabe 3 – Induzierte Spannung

Eine kreisförmige Leiterschleife liegt in der xy-Ebene und umschließt ein Gebiet mit einem sich zeitlich ändernden Magnetfeld $\overrightarrow{B}(t) = B(t) \cdot \hat{e}_z$. Der zeitliche Verlauf B(t) des Magnetfeldes ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

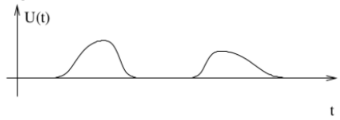


Welche der fünf folgenden Möglichkeiten zeigt einen möglichen zeitlichen Verlauf der induzierten Spannung U (t)in der Schleife?

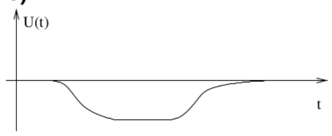
☐ **a)**



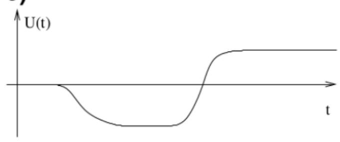
☐ **d)**



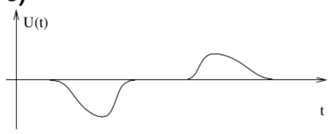
☐ **b)**



☐ **e)**



☐ **c)**

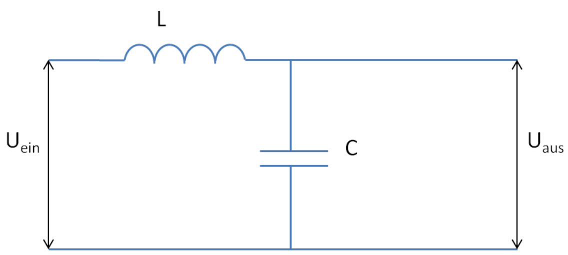


Aufgabe 4 – Lastinduktivität*

Angenommen wir erhöhen die Frequenz der Wechselspannung in einem Schaltkreis mit einer reinen Lastinduktivität. Wie verhalten sich (a) die Amplitude U_L und (b) die Amplitude I_L: nehmen sie zu, nehme sie ab oder bleiben sie gleich?

Aufgabe 5 – Hoch- & Tiefpass*

Ist die folgende Schaltung ein Hochpass oder ein Tiefpass? Warum?



Teil B: Rechenaufgaben

Aufgabe 6 – Gleichstrom-Glühbirnen im Haushaltsnetz

Emi und Simon möchten einen Raum ausleuchten. Die beiden haben im Keller von Simons Eltern ein paar alte Fahrrad-Glühbirnen gefunden. In völliger Missachtung der Ökodesign-Richtlinie 2005/32/EG der europäischen Union wollen die beiden die beiden Glühbirnen nutzen, um ihren Raum auszuleuchten. Die Glühbirnen sind allerdings auf Gleichstrom ausgelegt, doch die beiden denken sich, dass das schon keinen Unterschied machen wird. Es gibt die Glühbirnen in zwei verschiedenen Ausfertigungen. Emi und Simon verbinden immer jeweils 2 verschiedene Glühbirnen durch einen Draht in einer Parallelschaltung und verbinden ihre Glühbirnen-Konstruktion mit dem Stromnetz. Doch immer wieder passiert das Gleiche: kurze Zeit nachdem die Glühbirnen an die Steckdose angeschlossen wurden, brennen beide Glühbirnen durch.

Auf der Kiste der ersten Glühbirnen steht „*maximal 100 W Leistung anlegen*" auf der Kiste der zweiten Glühbirne steht „*maximal 60 W Leistung anlegen*". Wird dieser Leistungswert auch nur kurze Zeit überschritten, brennt die Glühbirne durch. Blöderweise haben Emi und Simon alle Lampen bis auf eine aus der ersten Kiste und eine aus der zweiten Kiste inzwischen kaputt gemacht. Simon vermisst die Innenwiderstände der Glühbirnen und erhält $R_1 = 800\ \Omega$ für die erste Glühbirne und $R_2 = 1000\ \Omega$ für die zweite Glühbirne.

Allgemeiner Hinweis: Das deutsche Haushaltsnetz liefert einen Wechselstrom mit einer Effektivspannung von $U_{eff} = 230$ V und einer Frequenz von $f = 50$ Hz.

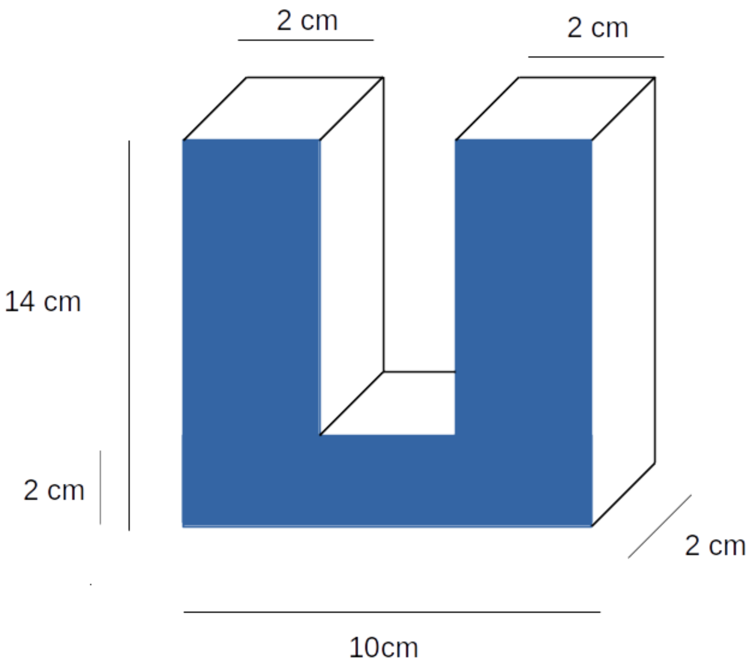
(a) Warum brennen die Glühbirnen in Parallelschaltung immer schon nach kurzer Zeit durch? Bestimmen Sie dazu die Leistung, die an den Glühbirnen anliegt.

(b) Als Simon Versuchsweise beide Glühbirnen in Reihe schaltet, leuchtet nur die zweite Glühbirne auf, die erste Glühbirne bleibt dunkel, die Glühbirnen brennen aber nicht durch. Woran liegt das?

(c) Aus einem alten Hufeisen und einem langen Kupferdraht wollen sich Simon und Emi nun einen Transformator basteln, den sie zwischen die Steckdose und ihre selbstgebaute Parallelschaltung der beiden Glühbirnen hängen wollen. Welches Wicklungsverhältnis müssen die beiden ihn ihrem Transformator verwenden, damit die Glühbirnen nicht durchbrennen?

(d) Leider müssen Simon und Emi feststellen, dass ihr Hufeisen nicht aus ferromagnetischesm Eisen, sondern nur aus billiger Keramik ($\mu_r = 2,2$) besteht. Damit ist der Traum einen Transformator zu bauen geplatzt. Warum?

(e) Emi kommt nun auf die Idee, aus dem Kupferdraht ($l = 5$ m) eine Spule zu wickeln und diese als Scheinwiderstand vor die Glühbirnen zu schalten. Der Kupferdraht hat einen Durchmesser von $d = 2$ mm. Das Hufeisen hat die Maße, die auf der folgenden Abbildung gezeigt werden. Wie groß ist die maximale Induktivität, die eine Spule haben kann, die Emi auf das Hufeisen wickelt? Nehmen Sie an, dass keine Schichten übereinander gewickelt werden dürfen.



Hinweis: Die Induktivität einer Spule ist gegeben als

$$L = N^2 \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \frac{A}{l}$$

Hierbei bezeichnet N die Wicklungszahl, A die Querschnittsfläche und l die Länge der Spule. Vernachlässigen sie Randeffekte, durch das Biegen der Spule am Rand.

Hinweis: Wenn Sie mit den in dieser Aufgabenstellung gegebenen Werten rechnen, werden Sie für die Induktivität ein Ergebnis erhalten, dass ungefähr Faktor 10^{-3} unter dem Wert liegt, der in der nächsten Teilaufgabe für die Spule angegeben wird. Wenn Sie in den Bereich der unten angegebenen Induktivität $L \sim$ mH kommen wollen, rechnen Sie als ob ihnen unbegrenzt viel Draht zum Wickeln zur Verfügung stünde.

Emi beginnt damit eine Spule zu wickeln. Dabei gelingt es ihm eine besonders gute Spule zu wickeln (MAGIC!). Er verbraucht dabei 1,2 m Draht. Als Emi und Simon die Induktivität der Spule ausmessen, bestimmen sie die Induktivität ihrer Spule als $L = 3,5\text{mH}$.
Wie Sie in Teilaufgabe (e) ausgerechnet haben, ist es natürlich unrealistisch mit 1,2 m Draht eine solch hohe Induktivität einfach so zu erreichen. Rechnen Sie einfach trotzdem mit den gegebenen Werten, dann erhält man schöne Ergebnisse.

(f) Wie groß ist die Impedanz, die diese Spule liefert? *Hinweis: Sie müssen nicht explizit auf die Phasenverschiebung eingehen, die durch die Spule verursacht wird. Ignorieren Sie in dieser Teilaufgabe zunächst den ohmschen Beitrag des Kupfers.*

Kommentar: Der Aufgabensteller hat sich leider durch verschiedene Benennungen im Internet verwirren lassen. Berechnen Sie bitte zunächst $Z_L = i \cdot X_L$ in dieser Aufgabenstellung.

(g) Vergleichen Sie nun die gerade berechnete Impedanz der Spule ohne ohmschen Widerstand mit dem ohmschen Widerstand der Spule. Kupfer besitzt eine Leitfähigkeit von $\sigma = 58 \cdot 10^6 \, \frac{1}{\Omega\text{m}}$. Welcher Blindwiderstand ergibt sich damit für die Spule?

Kommentar: Berechnen Sie hier bitte zunächst R_{Cu} und vergleichen Sie den Wert mit X_L aus Teilaufgabe (f). Berechnen Sie danach $|Z_{ges}|$ also den Nettowiderstand, den man in das Pseudo-Ohmsche Gesetz einsetzt $U = I \cdot |Z|$, um zu bewerten, wie viel Widerstand die Spule dem Wechselstrom am Ende insgesamt entgegensetzt.

(h) Wenn Emi und Simon die Spule vor ihre Glühbirnen schalten, können sie dann ihre parallelgeschalteten Glühbirnen an das Stromnetz hängen?

Aufgabe 7 – LRC-Schwingkreis*

Betrachten Sie einen sogenannter RLC-Schwingkreis. Dieser besteht aus einem Widerstand R, einer Spule mit Induktivität L und einem Kondensator der Kapazität C.

a) Bestimmen Sie eine DGL für den Strom I in diesem Stromkreis.

b) Leiten Sie diese DGL erneut her, indem Sie energetisch argumentieren: Abnahme der elektrischen und magnetischen Feldenergie = Joulesche Wärme im Widerstand R.

c) Überprüfen Sie, dass die DGL durch folgenden Ansatz gelöst wird,

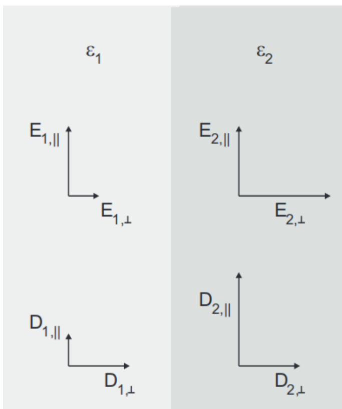
$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \phi), \tag{1}$$

und geben Sie außerdem Relationen für die Größen ω_1 und ω an. Gibt es eine Relation für ϕ?

d) Der Kondensator trage nun zu Beginn (t = 0) die Ladung Q = 0.01 C. Bestimme, nach welcher Zeit t die maximale Spannung im Stromkreis unter U = 10 V abgesunken ist. Nehmen Sie dafür an, dass $R = 100\ \Omega$, $L = 200\ \text{mH}$ und $C = 100\,\mu\text{F}$.

Aufgabe 8 – Elektrische Felder an Grenzflächen

Betrachten Sie die elektrischen Felder an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlicher Permittivität ϵ_r wie in folgender Abbildung dargestellt.



(a) Beweisen Sie: Die tangentiale Komponente des elektrischen Feldes ist stetig, also: $\vec{E}_{1,\parallel} = \vec{E}_{2,\parallel}$. Benutzen Sie die Tatsache, dass das elektrische Feld $\vec{E}$ rotationsfrei ist.

(b) Beweisen Sie: Die vertikale Komponente der dielektrischen Verschiebung ist stetig, also: $\vec{D}_{1,\perp} = \vec{D}_{2,\perp}$. Hier hatte sich in der ersten Version ein Typo eingeschlichen. Es muss $\vec{D}_{2,\perp}$ heißen, nicht $\vec{E}_{2,\perp}$ Benutzen Sie die Tatsache, dass die Quellen von $\vec{D}$ die freien Ladungen sind (also jene, die z.B. auf Kondensatorplatten sitzen).

Aufgabe 9 – Elektromagnetische Wellen*

Als J. C. Maxwell in den Jahren 1861 – 1864 die später nach ihm bennanten Maxwell-Gleichungen aufstellte, bemerkte er, dass seine Gleichungen Wellenlösungen zulassen, welche sich mit einer Geschwindigkeit c durch den leeren Raum pflanzen. Diese Geschwindigkeit konnte Maxwell zu seiner Zeit schon sehr gut messen und fand, dass c ungefähr der Lichtgeschwindigkeit entsprach. Er schrieb dazu folgendes:

> „Diese Geschwindigkeit ist so nahe an der des Lichtes, dass wir starken Grund zu dem Schluss haben, dass das Licht selbst (einschließlich der Wärmestrahlung sowie möglicher anderer Strahlung) eine elektromagnetische Störung ist, die sich entsprechend der elektromagnetischen Gesetze in Form von Wellen im elektromagnetischen Feld fortpflanzt.“

Die quantitative Verbindung zwischen Licht und Elektromagnetismus wird bis heute als ein großer Triumph der Physik des 19. Jahrhunderts angesehen, der darauffolgenden Jahrzente prägte. Im folgenden wollen wir daher elektromagnetische Wellen näher betrachten.

(i) Zeigen Sie, dass
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \tag{2}$$
Benutzen Sie hierfür $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

(ii) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen im Vakuum eine Wellengleichung für die elektrischen und magnetischen Felder her.

(iii) Zeigen Sie, dass monochromatische, ebene Wellen
$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t), \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t), \tag{3}$$
sowohl die Wellengleichung als auch alle Maxwell Gleichungen lösen. Welchen Bedingungen finden Sie für $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$?

Aufgabe 10 – Magnetische Monopole*

In der klassischen Elektrodynamik wird die komplette Dynamik des elektrischen und magnetischen Feldes durch Maxwells Gleichungen beschrieben. Diese können in folgender Form geschrieben werden:
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{5}$$
$$-\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{6}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{7}$$
1931 spekulierte Paul Dirac, dass es magnetische Monopole als das magnetische Gegenstück zum Elektron geben könnte, um so die Asymmetrie zwischen den sonst so ähnlichen Erscheinungen Magnetismus und Elektrizität zu beheben.

a) Wie müsste man die Maxwell-Gleichungen modifizieren, falls erhaltene magnetische Ladungen existieren würden? Benutzen Sie hierfür ρ_m und j_m als Analoga zur elektrischen Ladungsdichte ρ und zur elektrischen Stromdichte j_m. Achten Sie darauf, dass die zugefügten Terme die richtige Einheit und das richtige Vorzeichen haben. *Hinweis:* Die Dimension von ρ_m ist $[\rho_m] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2}$. Die Kontinuitätsgleichung lautet $\dot{\rho} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$.

b) Wie müsste man die Lorentzkraft modifizieren, falls erhaltene magnetische Ladungen existieren würden? Benutzen Sie hierfür q_m als Analogon zur elektrischen Ladung q.

Ein magnetischer Monopol mit „magnetischer Ladung" q_m im Koordinatenzentrum würde, ähnlich zur elektrischen Punktladung, folgendes Magnetfeld erzeugen:
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \hat{r}, \tag{8}$$
wobei $\hat{r}$ den radialen Einheitsvektor bezeichnet. Betrachten Sie nun ein Elektron im Magnetfeld eines ruhenden magnetischen Monopols. Der Drehimpuls in diesem System setzt sich zusammen aus dem Drehimpuls des Elektrons $\vec{L}$ und dem Drehimpuls des Elektromagnetischen Feldes $\vec{L}_{EM}$.

c) Benutzen Sie die „normale" Lorentzkraft um zu zeigen, dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{L}_{EM} = \vec{r} \times \vec{p} - \mu_0 e q_m/(4\pi)\hat{r}$ erhalten ist. Hinweis: Verwenden Sie $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

d) In der kurzen „Einführung in die Quantenmechanik" (Vorlesung 4) haben wir erfahren, dass die Komponenten des Drehimpulses gequantelt sind. In unserem Fall heißt das, dass $|J_i| = n\hbar/2$, wobei n eine natürliche Zahl ist und i die jeweilige Komponente bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Existenz von magnetischen Monopolen dazu führt, dass sowohl elektrische als auch magnetische Ladungen quantisiert sind, indem Sie fordern, dass $J_r = \hat{r} \cdot \vec{J}$ gequantelt ist.