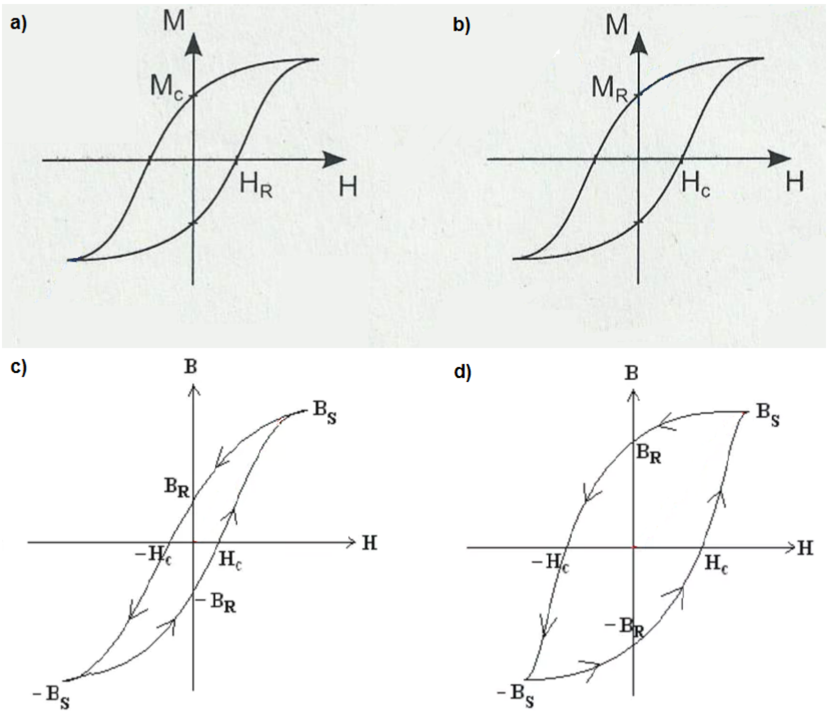
Übungsblatt Elektrodynamik 6

Besprechung in der Woche vom 09.07.18 bis 13.07.18

Teil A: Verständnisaufgaben

Aufgabe 1 – Hysterese

Welche der folgenden Abbildungen *von a) bis d)* zeigt eine korrekte Hysteresekurve eines schwach ferromagnetischen Materials?
Alle dargestellten Diagramme sind punktsymmetrisch zum Ursprung. Der Index R bedeutet „remanent“ und der Index C bedeutet „koerzitiv“.



Beschreiben Sie kurz, warum das Phänomen der Hysterese ein Problem beim sicheren Löschen von Daten spielen kann. Wie kann man Daten, die auf einer magnetischen Festplatte gespeichert wurden, sicher löschen (so, dass man sie nicht mehr wiederherstellen kann)? Nennen Sie mindestens 3 Möglichkeiten.

Lösung:

Zunächst eine Unterscheidung zwischen weich (schwach) und hart (stark) ferromagnetischem Material:

- weich: schlanke Hysteresekurve und somit kleine Remanenzmagnetisierung (nützlich für Transformatoren, da eine höhere Flussdichte B bei gleichem externen Feld H möglich ist)
- hart: möglichst rechteckige Hystereskurve und somit hohe Remanenzmagnetisierung (wird bei Festplatten verwendet, damit diese nicht bei kleinen Störungen und Magnetfelder korrupt werden)

Die schlankste Kurve mit kleinster Remanenzmagnetisierung ist durch c) gegeben.
Wie angesprochen bleibt bei den Speicherpunkten von Festplatten stets eine hohe Remanenzmagnetisierung. Um diese beim Löschen loszuwerden gibt es folgende Möglichkeiten:

- Erhöhung der Temperatur der Festplatte über Curie-Temperatur (Material wird paramagnetisch).
- Mehrfaches Überschreiben der Festplatte mit anderen wertlosen Informationen.
- Anlegen eines sehr starken externen Magnetfeldes (Neodym-Magnet oder Mikrowelle).
- Physische Zerstörung der Festplatte durch Zerschlagen mit Hammer oder Axt. Ausreichend starke Erschütterungen zerstören/stören die weißschen Bezirke im Ferromagneten.

Aufgabe 2 – LC-Schwingkreis*

Die maximale Spannung an einem Kondensator in einem LC-Schwingkreis sei 17 V und die maximale Energie auf dem Kondensator sei 160 µJ. Zu einem bestimmten Zeitpunkt habe dieser Kondensator die Spannung 5 V und die Energie 10 µJ. Wie groß sind zu diesem Zeitpunkt die (a) die Spannung an der Spule und (b) die Energie des magnetischen Felds? **Hinweis:** Die Aufgabe kann mit den ursprünglichen Angaben gelöst werden, diese sind allerdings nicht ganz konsistent. Für eine konsistente Aufgabenstellung ersetzen Sie die maximale Spannung mit 20 V (statt 17 V).

Lösung:

(a) Laut Kirchhoffscher Maschenregel gilt $U_C + U_L = 0$, also muss $U_C = -U_L$ gelten. Damit ist die Spannung an der Spule $-5\,\mathrm{V}$.

(b) Im LC-Schwingkreis gilt Energieerhaltung, also muss die maximale Kondensatorenergie momentan auf Kondensator und Spule verteilt sein:

$$E_{C,max} = E_C + E_L$$

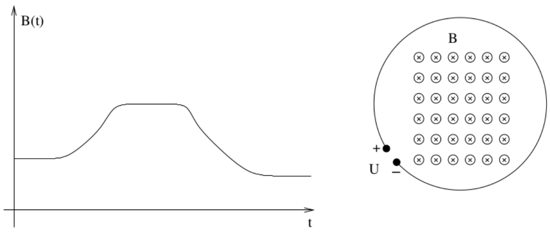
Aufgelöst nach der Spulenenergie und die angegebenen Werte eingesetzt:

$$E_L = E_{C,max} - E_C = 160\,\mu\mathrm{J} - 10\,\mu\mathrm{J} = 150\,\mu\mathrm{J}$$

Die Energie des magnetischen Feldes beträgt 150 µJ.

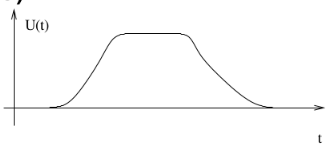
Aufgabe 3 – Induzierte Spannung

Eine kreisförmige Leiterschleife liegt in der xy-Ebene und umschließt ein Gebiet mit einem sich zeitlich ändernden Magnetfeld $\overrightarrow{B}(t) = B(t) \cdot \hat{e}_z$. Der zeitliche Verlauf B(t) des Magnetfeldes ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

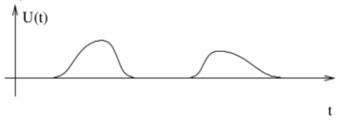


Welche der fünf folgenden Möglichkeiten zeigt einen möglichen zeitlichen Verlauf der induzierten Spannung U(t) in der Schleife?

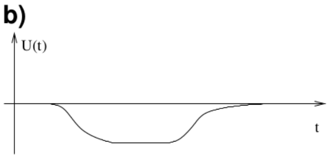
☐ **a)**



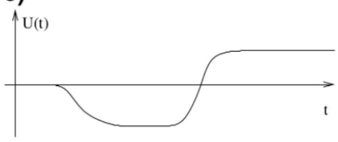
☐ **d)**



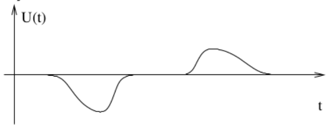
☐ **b)**



☐ **e)**



☒ **c)**



Lösung: Es gilt

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} \propto -\dot{B},$$

d.h. dass es genügt die Ableitung des gegebenen magnetischen Feldes graphisch zu bestimmen und mit (-1) zu multiplizieren, wonach die richtige Antwort (c) ist.

Aufgabe 4 – Lastinduktivität*

Angenommen wir erhöhen die Frequenz der Wechselspannung in einem Schaltkreis mit einer reinen Lastinduktivität. Wie verhalten sich (a) die Amplitude U_L und (b) die Amplitude I_L: nehmen sie zu, nehme sie ab oder bleiben sie gleich?

Lösung: Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir, dass der Schaltkreis aus einer einzigen Masche, bestehend aus Spannungsquelle und Spule besteht.

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) = U_L(t).$$

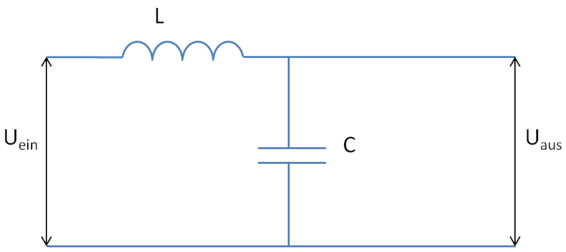
Somit bewirkt eine Änderung der Frequenz der Wechselspannung keine Änderung der Amplitude der Spannung.
An einer Spule gilt für den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom $U = LdI/dt$ und damit:

$$I(t) = \int \frac{U(t)}{L} dt = \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t) = I_L \sin(\omega t).$$

Damit ergibt sich für die Amplitude des Stroms $I = U_0/\omega L \propto 1/\omega$, sie nimmt also mit steigender Frequenz ab.

Aufgabe 5 – Hoch- & Tiefpass*

Ist die folgende Schaltung ein Hochpass oder ein Tiefpass? Warum?



Lösung: **Lösung:** Bei angelegter Wechselspannung kann man den Kondensator als kapazitiven Widerstand und die Spule als induktiven Widerstand auffassen. Diese sind gegeben durch:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{und} \quad X_L = \omega L$$

Wir können nun die Maschenregel anwenden auf die Masche, die Spule und Kondensator enthält, und bekommen:

$$U_{ein} = U_L + U_C \quad \text{und} \quad I_{ein} = I_L = I_C$$

wobei I_L, I_C, U_L und $U_C = U_{aus}$ die Ströme und anliegenden Spannungen bei Spule und Kondensator bezeichnen. Da die Ströme gleich sind, hängen die Spannungen an Spule und Kondensator nur von den Widerständen der jeweiligen Bauteile ab. Für hohe Frequenzen ω nimmt X_L zu, wohingegen X_C kleiner wird. Das bedeutet U_L ist groß, U_C dagegen klein, beide Effekte einzeln würden schon zu einer Unterdrückung hoher Frequenzen führen. Der abgebildete Stromkreis lässt also hohe Frequenzen nicht durch.
Bei niedrigen Frequenzen jedoch wird X_L und damit auch U_L klein, dagegen werden X_C und somit U_C groß. Für große ω gilt also $U_C \approx U_{ein}$, die Spannung wurde durchgelassen.

Folglich handelt es sich bei der Schaltung um einen Tiefpass.

Teil B: Rechenaufgaben

Aufgabe 6 – Gleichstrom-Glühbirnen im Haushaltsnetz

Emi und Simon möchten einen Raum ausleuchten. Die beiden haben im Keller von Simons Eltern ein paar alte Fahrrad-Glühbirnen gefunden. In völliger Missachtung der Ökodesign-Richtlinie 2005/32/EG der europäischen Union wollen die beiden die beiden Glühbirnen nutzen, um ihren Raum auszuleuchten. Die Glühbirnen sind allerdings auf Gleichstrom ausgelegt, doch die beiden denken sich, dass das schon keinen Unterschied machen wird. Es gibt die Glühbirnen in zwei verschiedenen Ausfertigungen. Emi und Simon verbinden immer jeweils 2 verschiedene Glühbirnen durch einen Draht in einer Parallelschaltung und verbinden ihre Glühbirnen-Konstruktion mit dem Stromnetz. Doch immer wieder passiert das Gleiche: kurze Zeit nachdem die Glühbirnen an die Steckdose angeschlossen wurden, brennen beide Glühbirnen durch.

Auf der Kiste der ersten Glühbirnen steht „*maximal 100W Leistung anlegen*“ auf der Kiste der zweiten Glühbirne steht „*maximal 60W Leistung anlegen*“. Wird dieser Leistungswert auch nur kurze Zeit überschritten, brennt die Glühbirne durch. Blöderweise haben Emi und Simon alle Lampen bis auf eine aus der ersten Kiste und eine aus der zweiten Kiste inzwischen kaputt gemacht. Simon vermisst die Innenwiderstände der Glühbirnen und erhält $R_1 = 800\ \Omega$ für die erste Glühbirne und $R_2 = 1000\ \Omega$ für die zweite Glühbirne.

Allgemeiner Hinweis: Das deutsche Haushaltsnetz liefert einen Wechselstrom mit einer Effektivspannung von $U_{\mathit{eff}} = 230$ V und einer Frequenz von $f = 50$ Hz.

(a) Warum brennen die Glühbirnen in Parallelschaltung immer schon nach kurzer Zeit durch? Bestimmen Sie dazu die Leistung, die an den Glühbirnen anliegt.

Lösung: Die ohmsche Leistung berechnet sich als:

$$P_{Ohm} = \frac{U^2}{R}.$$

Da in der Aufgabe gesagt wird, das schon kurze Leistungsüberschüsse, die Glühbirne zum Durchbrennen bringen können, reicht es nicht, die mittlere Leistung zu berechnen. Stattdessen, muss die Spitzenleistung im Wechselstromnetz berechnet werden.

Wie im allgemeinen Hinweis angegeben, hat das deutsche Stromnetz eine Effektivspannung $U_{\mathit{eff}} = 230$V. Das bedeutet für die Spitzenspannung $\hat{U}$ im deutschen Netz:

$$\hat{U} = \sqrt{2}\,U_{\mathit{eff}} = \sqrt{2} \cdot 230\,\mathrm{V} \approx 325\,\mathrm{V}.$$

Um den springenden Punkt dieser Aufgabe zu sehen, berechnen wir als nächstes sowohl die mittlere Leistung P_{eff} der Glühbirnen, als auch die Spitzenleistung $\hat{P}$:

(i) 1. Glühbirne - $P_{max} = 100\,\mathrm{W}$; $R = 800\,\Omega$:

$$P_{\mathit{eff},1} = \frac{U_{\mathit{eff}}^2}{R} = \frac{(230\,\mathrm{V})^2}{800\,\Omega} \approx 66\,\mathrm{W} < P_{max}$$

$$\hat{P}_1 = \frac{\hat{U}^2}{R} = \frac{(325\,\mathrm{V})^2}{800\,\Omega} \approx 132\,\mathrm{W} > P_{max}$$

(ii) 2. Glühbirne - $P_{max} = 60$ W; $R = 500\ \Omega$:

$$P_{\mathit{eff},2} = \frac{U_{\mathit{eff}}^2}{R} = \frac{(230\text{ V})^2}{500\ \Omega} \approx 53\text{ W} < P_{max}$$

$$\hat{P}_2 = \frac{\hat{U}^2}{R} = \frac{(325\text{ V})^2}{500\ \Omega} \approx 106\text{ W} > P_{max}$$

Wir erkennen also, dass die mittlere Leistung P_{eff} die maximal zulässige Leistung der Glühbirnen nicht übersteigt, die Spitzenleistung des Wechselstroms die maximal zulässige Leistung jedoch weit übersteigt. Daher würden die Glühbirnen vermutlich durchbrennen, wenn man sie parallel direkt ans Stromnetz hängt.

(b) Als Simon Versuchsweise beide Glühbirnen in Reihe schaltet, leuchtet nur die zweite Glühbirne auf, die erste Glühbirne bleibt dunkel, dei Glühbirnen brennen aber nicht durch. Woran liegt das?

Lösung: Zunächst muss man wissen, dass jede Glühbirne eine gewisse Betriebsleistung braucht, um zu leuchten. Unter dieser Leistung fließt einfach ein Strom durch den Draht und heizt den Draht, aber es wird kein Licht emitiert. Eine Glühbirne leuchtet also nur, wenn mindestens ihre Grundbetriebsleitung anliegt.

Wenn beide Glühbirnen in Reihe geschaltet werden, so fließt durch beide Glühbirnen der gleiche Strom I, der sich aus dem Gesamtwiderstand beider Glühbirnen berechnet. An beiden Glühbirnen wird dann nur die Leistung umgesetzt, die sich aus der Summe beider Widerstände berechnet:

$$P = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Diese Leistung ist kleiner als die Leistung, im Vergleich zum parallelgeschalteten Fall. Da die erste Glühbirne für höhere Leistungen konzipiert ist, ist auch ihre minimale Betriebsleistung höher, als die minimale Betriebsleistung der zweiten Glühbirne. Aus der Tatsache, dass die erste Glühbirne nicht leuchtet, können wir erkennen, dass diese minimale Betriebsleistung offenbar nicht aufgebracht wird, wenn beide Glühbirnen in Reihe geschaltet sind.

(c) Aus einem alten Hufeisen und einem langen Kupferdraht wollen sich Simon und Emi nun einen Transformator basteln, den sie zwischen die Steckdose und ihre selbstgebaute Parallelschaltung der beiden Glühbirnen hängen wollen. Welches Wicklungsverhältnis müssen die beiden ihn ihrem Transformator verwenden, damit die Glühbirnen nicht durchbrennen?

Lösung: Damit die Glühbirnen im parallelbetrieb nicht durchbrennen, muss die angelegte Maximalspannung unter der Spannung liegen, die durch die maximalen Betriebsleitungen vorgegeben wird:

$$\hat{P} > \frac{\hat{U}^2}{R} \quad \Longrightarrow \quad \hat{U} < \sqrt{\hat{P} \cdot R}.$$

Wir berechnen $\hat{U}$ separat für beide Glühbirnen und wählen dann die niedrigere Spannung:

$$\hat{U}_1 < \sqrt{100\,\text{W} \cdot 800\,\Omega} \approx 283\,\text{V},$$
$$\hat{U}_2 < \sqrt{60\,\text{W} \cdot 1000\,\Omega} \approx 245\,\text{V}.$$

Wir müssen folglich den Transformator einstellen, sodass er den Strom auf mindestens 245 V Spitzenspannung heruntertransformiert.

Das entspricht einer effektiven Spannung von:

$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{245\,\text{V}}{\sqrt{2}} \approx 173\,\text{V}.$$

Für einen Transformator gilt die simple Formel:

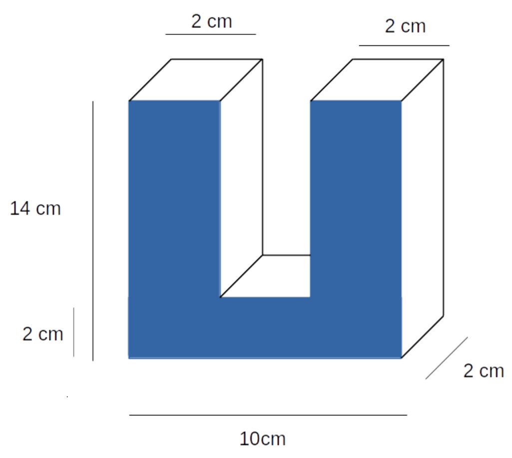
$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{230\ \text{V}}{173\ \text{V}} \approx 1.33 \approx \frac{4}{3}$$

Wir benötigen folglich ein Wicklungsverhätnis von ungefähr 4:3 von der Netzseite zur Glühbirnenseite.

(d) Leider müssen Simon und Emi feststellen, dass ihr Hufeisen nicht aus ferromagnetischesm Eisen, sondern nur aus billiger Keramik ($\mu_r = 2,2$) besteht. Damit ist der Traum einen Transformator zu bauen geplatzt. Warum?

Lösung: Damit ein Transformator so funktioniert, wie wir das in der Vorlesung gelernt haben, muss das Magnetfeld der einen Spule in die andere Spule übertragen werden. Außerdem muss näherungsweise gelten, dass das Magnetfeld nur innerhalb der Spule selbst relevant ist. Diese beiden Bedingungen sind allerdings nur erfüllt, wenn wir ein ferromagnetisches Medium als Überträger verwenden können. Hinzu kommt auch noch, dass die Induktionseffekte innerhalb der Spule zu klein sind, wenn wir nicht eine ferromagnetische Verstärkung nutzen können. Insgesamt ist ein Überträger, der nur paramagnetisch ($\mu_r = 2,2$) ist, nicht geeignet, um einen Transformator zu bauen.

(e) Emi kommt nun auf die Idee, aus dem Kupferdraht ($l = 5$ m) eine Spule zu wickeln und diese als Scheinwiderstand vor die Glühbirnen zu schalten. Der Kupferdraht hat einen Durchmesser von $d = 2$ mm. Das Hufeisen hat die Maße, die auf der folgenden Abbildung gezeigt werden. Wie groß ist die maximale Induktivität, die eine Spule haben kann, die Emi auf das Hufeisen wickelt? Nehmen Sie an, dass keine Schichten übereinander gewickelt werden dürfen.



Hinweis: Die Induktivität einer Spule ist gegeben als

$$L = N^2 \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \frac{A}{l}$$

Hierbei bezeichnet N die Wicklungszahl, A die Querschnittsfläche und l die Länge der Spule. Vernachlässigen sie Randeffekte, durch das Biegen der Spule am Rand.

Hinweis: Wenn Sie mit den in dieser Aufgabenstellung gegebenen Werten rechnen, werden Sie für die Induktivität ein Ergebnis erhalten, dass ungefähr Faktor 10^{-3} unter dem Wert liegt, der in der nächsten Teilaufgabe für die Spule angegeben wird. Wenn Sie in den Bereich der unten angegebenen Induktivität $L \sim$ mH kommen wollen, rechnen Sie als ob ihnen unbegrenzt viel Draht zum Wickeln zur Verfügung stünde.

Lösung: Die Formel für die Induktivität der Spule ist gegeben. Wir müssen eigentlich nur ausrechnen, wie viele Wicklungen auf das Hufeisen passen. Der einfachste Ansatz dafür ist, dass wir die Fläche des Us ausrechnen und ausrechnen, wie viel Platz eine Wicklung Draht auf dem U verbraucht.

Noch einfacher ist es die Kantenlänge zu bestimmen, die auf dem U zur Verfügung stehen und sie durch die Breite des Drahts zu teilen. Dabei nehmen wir an, dass auf den beiden Quadraten links und rechts unten keine Wicklungen gemacht werden können. Dann erhalten wir drei Segmente, die mit Draht umwickelt werden können:

(i) Links oben: Hat eine Länge von 12 cm. Da ein Draht Durchmesser von 2 mm besitzt können wir folglich $12\ \text{cm}/0,2\ \text{cm} = 60$ Wicklungen Draht um dieses Segment wickeln.

(ii) Ebenso rechts oben.

(iii) Unten in der Mitte: Hat eine Länge von 6 cm. Hier können wir folglich $6\ \text{cm}/0,2\ \text{cm} = 30$ Wicklungen aufwickeln.

Insgesamt kommen wir folglich auf eine Wicklungszahl von $N = 60 + 30 + 60 = 150$.

Hinweis: Diese Rechnung vernachlässigt beide Quadrate in den unteren Ecke der Hufeisen. Diese können auch berücksichtigt werden. Aus diesem Grund ist jedes Ergbenis $N \in [140, 200]$ als richtige Antwort zu werten.

Nun können wir in die gegebene Formel einsetzen. Hierbei berechnet sich die Querschnittsfläche A der Spule als $A = (2\ \text{cm})^2 = 4{\cdot}10^{-4}\text{m}^2$ und die Länge der Spule als $l = 12\ \text{cm}{+}6\ \text{cm}{+}12\ \text{cm} = 30\ \text{cm}$:

$$L = N^2 \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \frac{A}{l} = 150^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 2,2 \cdot \frac{0.02\ \text{m}^2}{0.3\ \text{m}} \approx 0,0041\ \text{H} = 83 \cdot 10^{-6}\,\text{H}$$

Hinweis: Entsprechend der oben berechneten Wicklungszahl ist jedes Ergebnis $L \in [2\ \text{mH}, 8\ \text{mH}]$ als richtige Antwort zu werten.

Emi beginnt damit eine Spule zu wickeln. Dabei gelingt es ihm eine besonders gute Spule zu wickeln (MAGIC!). Er verbraucht dabei 1,2 m Draht. Als Emi und Simon die Induktivität der Spule ausmessen, bestimmen sie die Induktivität ihrer Spule als $L = 3,5\,\text{mH}$.
Wie Sie in Teilaufgabe (e) ausgerechnet haben, ist es natürlich unrealistisch mit 1,2 m Draht eine solch hohe Induktivität einfach so zu erreichen. Rechnen Sie einfach trotzdem mit den gegebenen Werten, dann erhält man schöne Ergebnisse.

(f) Wie groß ist die Impedanz, die diese Spule liefert? *Hinweis: Sie müssen nicht explizit auf die Phasenverschiebung eingehen, die durch die Spule verursacht wird. Ignorieren Sie in dieser Teilaufgabe zunächst den ohmschen Beitrag des Kupfers.*

Kommentar: Der Aufgabensteller hat sich leider durch verschiedene Benennungen im Internet verwirren lassen. Berechnen Sie bitte zunächst $Z_L = i \cdot X_L$ in dieser Aufgabenstellung.

Lösung: Die Impedanz einer Spule bestimmt sich als

$$Z_L = i\omega L$$

$$Z_L = i\omega L = i \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ H} \approx 1,1\ \Omega \cdot i$$

(g) Vergleichen Sie nun die gerade berechnete Impedanz der Spule ohne ohmschen Widerstand mit dem ohmschen Widerstand der Spule. Kupfer besitzt eine Leitfähigkeit von $\sigma = 58 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega\text{m}}$. Welcher Blindwiderstand ergibt sich damit für die Spule?

Kommentar: Berechnen Sie hier bitte zunächst R_{Cu} und vergleichen Sie den Wert mit X_L aus Teilaufgabe (f). Berechnen Sie danach $|Z_{ges}|$ also den Nettowiderstand, den man in das Pseudo-Ohmsche Gesetz einsetzt $U = I \cdot |Z|$, um zu bewerten, wie viel Widerstand die Spule dem Wechselstrom am Ende insgesamt entgegensetzt.

Lösung: Der Widerstand eines ohmschen Leiters bestimmt sich als:

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{58 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega\text{m}}} \cdot \frac{1.2 \text{ m}}{\pi \cdot (1 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} \approx 0.0066\Omega = 6,6\,\text{m}\Omega.$$

Damit ergibt sich als Gesamtscheinwiderstand:

$$Z = R_{CU} + i \cdot X_L = 6,6 \cdot 10^{-3}\,\Omega + i \cdot 1,1\,\Omega.$$

Für den Leistungsabfall ist der Betrag des Gesamtscheinwiderstands (= Blindwiderstand) verantwortlich:

$$|Z| = \sqrt{R_{CU}^2 + X_L^2} = \sqrt{(6,6 \cdot 10^{-3}\,\Omega)^2 + (1,1\,\Omega)^2} \approx 1,1\,\Omega.$$

Wie wir sehen spielt der ohmsche Widerstand keine Rolle für den Leistungsabfall in der Spule.

(h) Wenn Emi und Simon die Spule vor ihre Glühbirnen schalten, können sie dann ihre parallelgeschalteten Glühbirnen an das Stromnetz hängen?

Lösung: Damit die Glühbirnen nicht mehr durchbrennen, muss die an den Glühbirnen angelegte Spannung absinken. Das gelingt signifikant jedoch nur mit Widerständen in der Größenordnung der ohmschen Widerstände der Glühbirne. Da die ohmschen Widerstände der Glühbirnen jedoch um den Faktor 1000 größer als der Blindwiderstand der Spule sind, wird auch die Spule nicht viel helfen, wenn sie vor die Glühbirnen geschaltet wird.

Aufgabe 7 – LRC-Schwingkreis*

Betrachten Sie einen sogenannter RLC-Schwingkreis. Dieser besteht aus einem Widerstand R, einer Spule mit Induktivität L und einem Kondensator der Kapazität C.

a) Bestimmen Sie eine DGL für den Strom I in diesem Stromkreis.

Lösung: Wir nehmen die Maschenregel her, bilden die Zeitableitung und nutzen $\dot{Q} = I$:

$$
\begin{aligned}
& U_C + U_R + U_L = 0, \\
\implies \quad & \frac{Q}{C} + RI + L\dot{I} = 0, \\
\overset{d/dt}{\implies} \quad & \frac{\dot{Q}}{C} + R\dot{I} + L\ddot{I} = 0, \\
\implies \quad & \frac{I}{C} + R\dot{I} + L\ddot{I} = 0, \\
\implies \quad & \ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{I}{LC} = 0.
\end{aligned}
$$

---

b) Leiten Sie diese DGL erneut her, indem Sie energetisch argumentieren: Abnahme der elektrischen und magnetischen Feldenergie = Joulesche Wärme im Widerstand R.

Lösung:

Für die Leistung im RLC-Scghaltkreis gilt:

$$P = -\frac{d}{dt}\left(W_C + W_L\right) = P_R = U \cdot I$$

Weiterrechnen ergibt:

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CU^2 + \frac{1}{2}LI^2\right) &= RI^2 \\
-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2\right) &= RI^2 \\
-\frac{Q \cdot I}{C} - L \cdot I \cdot \dot{I} &= RI^2 \qquad | : I \\
-\frac{Q}{C} - L \cdot \dot{I} &= RI
\end{aligned}
$$

Umstellen dieser Gleichng liefert die bekannte Gleichung für den gedämpften harmonischen RLC-Schwingkreis:

$$\frac{Q}{C} + R \cdot \dot{Q} + L \cdot \ddot{Q} = 0$$

Nochmaliges Ableiten ergibt

$$\frac{I}{C} + R \cdot \dot{I} + L \cdot \ddot{I} = 0$$

---

c) Überprüfen Sie, dass die DGL durch folgenden Ansatz gelöst wird,

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \phi), \tag{1}$$

und geben Sie außerdem Relationen für die Größen ω_1 und ω an. Gibt es eine Relation für ϕ?

Lösung:
Wir setzen den gegebenen Ansatz in die Differentialgleichung ein:

$$\frac{I}{C} + R \cdot \dot{I} + L \cdot \ddot{I} = 0$$

$$\frac{1}{C} \cdot I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\omega_1 t} \cdot \cos(\omega t + \phi) + R \cdot \frac{d}{dt}\left(I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\omega_1 t} \cdot \cos(\omega t + \phi)\right) + L \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\omega_1 t} \cdot \cos(\omega t + \phi)\right) = 0$$

Ableitungen bestimmen:

$$\frac{1}{C} \cdot I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\omega_1 t} \cdot \cos(\omega t + \phi) + R \cdot \left(-I_0 \cdot \omega_1 \cdot \mathrm{e}^{-\omega_1 t} \cdot \cos(\omega t + \phi) - I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\omega_1 t} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \phi)\right)$$

$$+ L \cdot \left(I_0 \cdot \omega_1 \cdot \mathrm{e}^{-\omega_1 t} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \phi) + I_0 \cdot \omega_1^2 \cdot \mathrm{e}^{-\omega_1 t} \cdot \cos(\omega t + \phi) - I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\omega_1 t} \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \phi)\right) = 0$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt nun:

$$\mathrm{e}^{-\omega_1 t} \cdot \cos(\omega t + \phi): \ \frac{1}{C} - R\omega_1 + L\omega_1^2 - L\omega^2 = 0$$

$$\mathrm{e}^{-\omega_1 t} \cdot sin(\omega t + \phi): \ -R\omega + L\omega\omega_1 + L\omega\omega_1 = 0$$

Aus $R\omega + 2L\omega\omega_1 = 0 \Rightarrow \omega \cdot (R + 2L\omega_1) = 0 \overset{\omega \neq 0}{\Rightarrow} R + 2L\omega_1 = 0$ folgt:

$$\omega_1 = \frac{R}{2L}$$

Setzen wir dies nun in die Gleichung $\frac{1}{C} - R\omega_1 + L\omega_1^2 - L\omega^2 = 0$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{1}{C} - R\frac{R}{2L} + L\frac{R^2}{4L^2} - L\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} - L\frac{R^2}{2L^2} - L\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ergibt sich

$$\gamma = \omega_1 = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

ϕ bezeichnet nur eine Phasenverschiebung und hängt ausschließlich von den Anfangsbedingungen der Differentialgleichung ab.

---

d) Der Kondensator trage nun zu Beginn (t = 0) die Ladung Q = 0.01 C. Bestimme, nach welcher Zeit t die maximale Spannung im Stromkreis unter U = 10 V abgesunken ist. Nehmen Sie dafür an, dass $R = 100\ \Omega$, $L = 200\ \text{mH}$ und $C = 100\,\mu\text{F}$.

Lösung: Die DGL für Q hat exakt die selbe Form wie die DGL für I, d.h.

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \phi).$$

Der schwingende Faktor von Q wird je nach Anfangsbedingungen anders aussehen als der schwingende Faktor von I. Für diese Aufgabe genügt es allerdings den nicht-schwingenden Faktor zu betrachten, d.h. dass unser Ergebnis unabhängig von den Anfangsbedingungen sein wird.

Im Kondensator gilt $U = Q/C$, daher

$$U = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \phi) \quad \Longrightarrow \quad \hat{U} = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \stackrel{!}{=} 10\,\mathrm{V}.$$

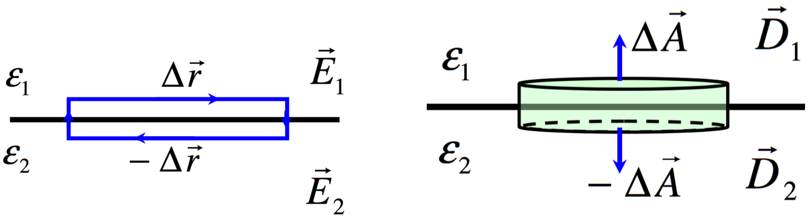
Umstellen auf t und einsetzen der Werte ergibt

$$t = \frac{\ln \frac{C \cdot 10\,\mathrm{V}}{Q_0}}{-\omega_1} = 9{,}2\,\mathrm{ms}. \tag{2}$$

Aufgabe 8 – Elektrische Felder an Grenzflächen

Betrachten Sie die elektrischen Felder an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlicher Permittivität ϵ_r wie in folgender Abbildung dargestellt.

Lösungsskizze:



(a) (b)

(a) Beweisen Sie: Die tangentiale Komponente des elektrischen Feldes ist stetig, also: $\overrightarrow{E}_{1,\|} = \overrightarrow{E}_{2,\|}$. Benutzen Sie die Tatsache, dass das elektrische Feld $\overrightarrow{E}$ rotationsfrei ist.

Lösung:

Wir betrachten einen rechteckigen Weg innerhalb der beiden Medien, wobei die beiden senkrechten Wegstücke infinitesimal klein sein sollen. Dann gilt im Fall der Elektrostatik für das Integral über diesen geschlossenen Weg:

$$\oint_r \vec{E}\, d\vec{r} = 0$$

$$\vec{E}_{1,\|} \cdot \Delta\vec{r} + \vec{E}_{2,\|} \cdot (-\Delta\vec{r}) = 0$$

$$(\vec{E}_{1,\|} - \vec{E}_{2,\|}) \cdot \Delta\vec{r} = 0$$

$$\vec{E}_{1,\|} = \vec{E}_{2,\|}$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist an der Grenzfläche zweier Medien stetig.

(b) Beweisen Sie: Die vertikale Komponente der dielektrischen Verschiebung ist stetig, also: $\overrightarrow{D}_{1,\perp} = \overrightarrow{D}_{2,\perp}$. Benutzen Sie die Tatsache, dass die Quellen von $\overrightarrow{D}$ die freien Ladungen sind (also jene, die z.B. auf Kondensatorplatten sitzen).

Lösung: Wir betrachten nun einen Zylinder innerhalb der beiden Medien, wobei die Höhe infinitesimal klein sein soll. Dann gilt wegen der 1. Maxwellgleichung für das geschlossene Oberflächenintegral über das Feld der dielektrischen Verschiebung im Fall, dass sich keine freien Ladungen an der Grenzfläche befinden.

$$\int_A \vec{D}\, d\vec{A} = 0$$

$$\vec{D}_{1,\perp} \cdot \Delta\vec{A} + \vec{D}_{2,\perp} \cdot (-\Delta\vec{A}) = 0$$
$$(\vec{D}_{1,\perp} - \vec{D}_{2,\perp}) \cdot \Delta\vec{A} = 0$$
$$\vec{D}_{1,\perp} = \vec{D}_{2,\perp}$$

Aufgabe 9 – Elektromagnetische Wellen*

Als J. C. Maxwell in den Jahren 1861 – 1864 die später nach ihm bennanten Maxwell-Gleichungen aufstellte, bemerkte er, dass seine Gleichungen Wellenlösungen zulassen, welche sich mit einer Geschwindigkeit c durch den leeren Raum pflanzen. Diese Geschwindigkeit konnte Maxwell zu seiner Zeit schon sehr gut messen und fand, dass c ungefähr der Lichtgeschwindigkeit entsprach. Er schrieb dazu folgendes:

> „Diese Geschwindigkeit ist so nahe an der des Lichtes, dass wir starken Grund zu dem Schluss haben, dass das Licht selbst (einschließlich der Wärmestrahlung sowie möglicher anderer Strahlung) eine elektromagnetische Störung ist, die sich entsprechend der elektromagnetischen Gesetze in Form von Wellen im elektromagnetischen Feld fortpflanzt.“

Die quantitative Verbindung zwischen Licht und Elektromagnetismus wird bis heute als ein großer Triumph der Physik des 19. Jahrhunderts angesehen, der darauffolgenden Jahrzente prägte. Im folgenden wollen wir daher elektromagnetische Wellen näher betrachten.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \tag{3}$$

Benutzen Sie hierfür $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (\nabla \times \vec{A})]^k &= \partial_i (\nabla \times \vec{A})_j \epsilon^{ijk} \\
&= \partial_i \partial^l A^m \epsilon_{lmj} \epsilon^{ijk} \\
&= \partial_i \partial^l A^m \epsilon_{lmj} \epsilon^{jki} \\
&= \partial_i \partial^l A^m ({\delta_l}^k {\delta_m}^i - {\delta_l}^i {\delta_m}^k) \\
&= \partial^k (\partial_m A^m) - \partial_i \partial^i A^k \\
&= [\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}]^k.
\end{aligned}$$

Alternativ können Sie dies auch in Vektornotation oder ohne die Einstein-Konvention zeigen.

(ii) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen im Vakuum eine Wellengleichung für die elektrischen und magnetischen Felder her.

Lösung: Betrachten Sie die Maxwell Gleichungen, welche die Rotation von $\vec{E}$ oder $\vec{B}$ enthalten:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Im Folgenden werden wir nur die Wellengleichung für $\vec{E}$ herleiten, da die Rechnung für $\vec{B}$ komplett analog ist. Wir bilden die ,,Rot" der obigen Gleichungen, nutzen das Resultat aus der a) auf der linken Seite der Gleichung und nutzen die jeweils andere der beiden Gleichungen um die rechte Seite zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
\Longrightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}), \\
\Longrightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Letztlich, erinnern wir uns, dass $\nabla \cdot E = 0$ für den Fall ohne Quellen und erhalten

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E} = \Box\vec{E} = 0.$$

Die Gleiche Rechnung für $\vec{B}$ ergibt dann $\Box\vec{B} = 0$. Das Symbol „$\Box$" bezeichne man als den d'Alembert-, Wellen- oder Box-Operator.

(iii) Zeigen Sie, dass monochromatische, ebene Wellen

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t), \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t), \tag{4}$$

sowohl die Wellengleichung als auch alle Maxwell Gleichungen lösen. Welchen Bedingungen finden Sie für $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$?

Lösung: Unser Ansatz lautet:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t), \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t),$$

wobei $\omega = kc$. Dieser Ansatz löst die Wellengleichung:

$$\begin{aligned}
\Box\vec{E} &= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) = \left(-\frac{1}{c^2}\omega^2 + k^2\right)\vec{E}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) = 0,\\
\Box\vec{B} &= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{B}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) = \left(-\frac{1}{c^2}\omega^2 + k^2\right)\vec{B}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) = 0.
\end{aligned}$$

Und auch alle Maxwell Gleichungen:

(a) $\nabla \cdot \vec{E} = -(\vec{k}\cdot\vec{E}_0)\sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) \overset{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{k}\perp\vec{E}_0,$

(b) $\nabla \cdot \vec{B} = -(\vec{k}\cdot\vec{B}_0)\sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) \overset{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{k}\perp\vec{B}_0,$

(c) $\nabla \times \vec{E} = -(\vec{k}\times\vec{E}_0)\sin(kz - \omega t) \overset{!}{=} \omega\vec{B}_0\sin(kz - \omega t) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{B}_0 = \frac{\vec{k}\times\vec{E}_0}{\omega},$

(d) Analog zu c).

Da $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a}) = 0$ für beliebige Vektoren $\vec{a}$,$\vec{b}$ und $\vec{c}$, gilt $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$. Somit gilt $\vec{k}\perp\vec{E}_0\perp\vec{B}_0$ und wir können das Koordinatensystem so wählen, sodass $\vec{k} = k\hat{z}$, $\vec{E}_0 = E_0\hat{x}$ und $\vec{B}_0 = \frac{E_0}{c}\hat{y}$. Wir können also schreiben

$$\vec{E} = E_0\cos(kz - \omega t)\hat{x}, \qquad \vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t)\hat{y}.$$

Aufgabe 10 – Magnetische Monopole*

In der klassischen Elektrodynamik wird die komplette Dynamik des elektrischen und magnetischen Feldes durch Maxwells Gleichungen beschrieben. Diese können in folgender Form geschrieben werden:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{6}$$

$$-\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{7}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{8}$$

1931 spekulierte Paul Dirac, dass es magnetische Monopole als das magnetische Gegenstück zum Elektron geben könnte, um so die Asymmetrie zwischen den sonst so ähnlichen Erscheinungen Magnetismus und Elektrizität zu beheben.

a) Wie müsste man die Maxwell-Gleichungen modifizieren, falls erhaltene magnetische Ladungen existieren würden? Benutzen Sie hierfür ρ_m und j_m als Analoga zur elektrischen Ladungsdichte ρ und zur elektrischen Stromdichte j_m. Achten Sie darauf, dass die zugefügten Terme die richtige Einheit und das richtige Vorzeichen haben. *Hinweis:* Die Dimension von ρ_m ist $[\rho_m] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2}$. Die Kontinuitätsgleichung lautet $\dot{\rho} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$.

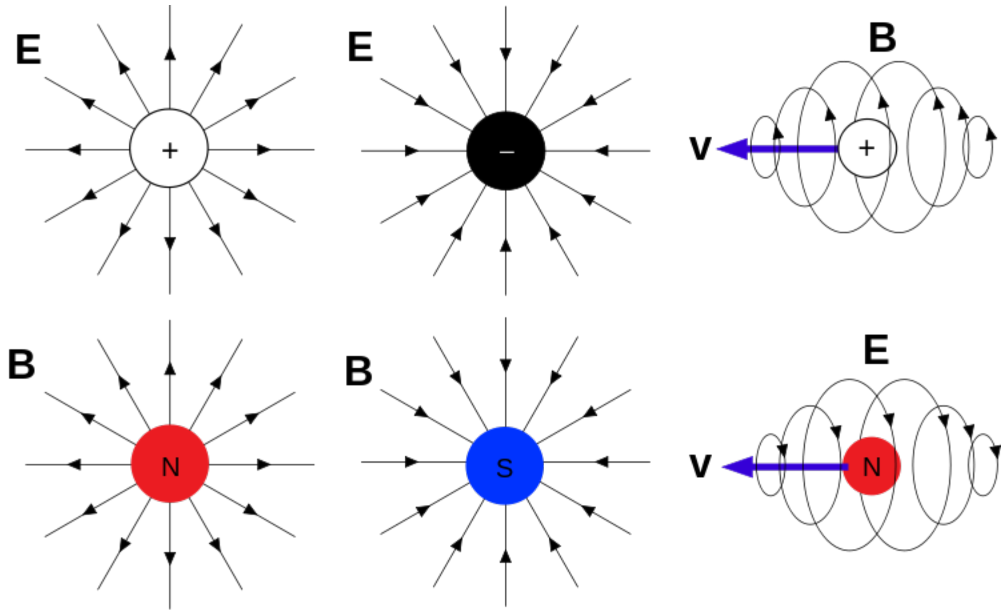
Lösung: Wir fügen den obigen Gleichungen Terme hinzu, sodass sie für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ die gleiche Form haben. Im zweiten Schritt bestimmen wir die Konstanten A_1 und A_2 durch Dimensionsanalyse.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & &\Longrightarrow & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= A_1 \rho_m & &\Longrightarrow & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \mu_0 \rho_m \\
-\vec{\nabla} \times \vec{E} &= A_2 \vec{j}_m + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & &\Longrightarrow & -\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \mu_0 \vec{j}_m + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & &\Longrightarrow & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Das Vorzeichen des magnetischen Gaußschen Satzes haben wir festgelegt, sodass die Feldlinie von positiven monopolen (Nord) ausgehen und zu negativen (Süd) zugehen. Die Kontinuitätsgleichung legt dann das Vorzeichen des Induktionsgesetzes fest:

$$\dot{\rho}_m = \frac{1}{\mu_0} \partial_t \nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \dot{\vec{B}} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot \vec{j} \quad \checkmark$$

Es fällt somit auf, das bewegte magnetische Ladungen ein elektrisches Wirbelfeld erzeugen, jedoch in die entgegengesetzte Richtung zu dem magnetischen Wirbelfeld, welches von bewegten elektrischen Ladungen erzeugt wird (vgl. Abbildung)



---

b) Wie müsste man die Lorentzkraft modifizieren, falls erhaltene magnetische Ladungen existieren würden? Benutzen Sie hierfür q_m als Analogon zur elektrischen Ladung q.

Lösung: Wir gehen Analog zur a) vor und erhalten

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + q_m(A_1\vec{B} - A_2\vec{v} \times \vec{E}) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + q_m(\vec{B} - \vec{v} \times \frac{\vec{E}}{c^2}),$$

wobei das negative Vorzeichen eine Folge aus dem zusätzlichen negativen Vorzeichen in den modifizierten Maxwell-Gleichungen ist.

Ein magnetischer Monopol mit ,,magnetischer Ladung" q_m im Koordinatenzentrum würde, ähnlich zur elektrischen Punktladung, folgendes Magnetfeld erzeugen:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{r^2}\hat{r}, \tag{9}$$

wobei $\hat{r}$ den radialen Einheitsvektor bezeichnet. Betrachten Sie nun ein Elektron im Magnetfeld eines ruhenden magnetischen Monopols. Der Drehimpuls in diesem System setzt sich zusammen aus dem Drehimpuls des Elektrons $\vec{L}$ und dem Drehimpuls des Elektromagnetischen Feldes $\vec{L}_{EM}$.

c) Benutzen Sie die ,,normale" Lorentzkraft um zu zeigen, dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{L}_{EM} = \vec{r} \times \vec{p} - \mu_0 e q_m/(4\pi)\hat{r}$ erhalten ist. Hinweis: Verwenden Sie $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Lösung: Wir schreiben den radialen Einheitsvektor wie folgt um: $\hat{r} = \vec{r}/r$. Die Lorentzkraft für dieses System nimmt folgende Form an:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{\mu_0 e q_m}{4\pi r^3}(\vec{v} \times \vec{r}).$$

Wir zeigen nun, dass die Zeitableitung von $\vec{J}$ verschwindet und $\vec{J}$ somit erhalten ist.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{J} &= \frac{d}{dt}\Big(\vec{r}\times\vec{p} - \frac{\mu_0\, eq_m}{4\pi}\hat{r}\Big) \\
&= \underbrace{\vec{v}\times\vec{p}}_{=\vec{v}\times m\vec{v}=0} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}} - \frac{\mu_0\, eq_m}{4\pi}\frac{d}{dt}\hat{r} \\
&= \frac{\mu_0\, eq_m}{4\pi r^3} r\times(\vec{v}\times\vec{r}) - \frac{\mu_0\, eq_m}{4\pi}\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} \\
&= \frac{\mu_0\, eq_m}{4\pi}\Big[\frac{1}{r^3}\Big(r^2\vec{v} - (\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{r}\Big) - \Big(\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\vec{r}v}{r^2}\Big)\Big] \\
&= \frac{\mu_0\, eq_m}{4\pi}\Big[\Big(\frac{\vec{v}}{r} - \underbrace{\frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{r}}{r^3}}_{=\frac{v\vec{r}}{r^2}}\Big) - \Big(\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\vec{r}v}{r^2}\Big)\Big] = 0,
\end{aligned}$$

wobei wir für die Letzte Gleichheit benutzt haben, dass man $\vec{v}$ in eine radiale und dazu senkrechte Komponente zerlegen kann: $\vec{v} = v\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$.

---

d) In der kurzen ,,Einführung in die Quantenmechanik" (Vorlesung 4) haben wir erfahren, dass die Komponenten des Drehimpulses gequantelt sind. In unserem Fall heißt das, dass $|J_i| = n\hbar/2$, wobei n eine natürliche Zahl ist und i die jeweilige Komponente bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Existenz von magnetischen Monopolen dazu führt, dass sowohl elektrische als auch magnetische Ladungen quantisiert sind, indem Sie fordern, dass $J_r = \hat{r}\cdot\vec{J}$ gequantelt ist.

Lösung:

$$\begin{aligned}
|J_r| = \big|\hat{r}\cdot\vec{J}\big| = \Big|\hat{r}\cdot\Big(\vec{r}\times\vec{p} - \frac{\mu_0\, eq_m}{4\pi}\hat{r}\Big)\Big| = \Big| - \hat{r}\cdot\Big(\frac{\mu_0\, eq_m}{4\pi}\hat{r}\Big)\Big| = \frac{\mu_0\, eq_m}{4\pi} \overset{!}{=} \frac{n\hbar}{2} \\
\implies eq_m = \frac{2\pi\hbar}{\mu_0} n
\end{aligned}$$

Dies ist die sog. Dirac'sche Quantisierungsbedingung, welche, wie in der Aufgabenstellung bereits gesagt, eine direkte Folge der Existenz von Monopolen ist. Magnetische Monopole bieten also eine lukrative Erklärung für die Quantisierung der elektrischen Ladung an.

Für die Interessierten:
Im modernen Quantenfeldtheorie Formalismus, also dem Formalismus der die Vereinigung von spezieller Relativitätstheorie und Quantenmechanik ermöglicht, lassen sich sogar konkrete Vorhersagen über die Monopole machen. Das Standard Model der Teilchenphysik beinhaltet keine magnetischen Monopole, jedoch sagen viele Theorien *beyond the Standard Model*, wie *Grand Unified Theories* (GUTs) und Stringtheorie, ihre Existenz voraus. Z.B. besitzen Monopole in GUTs eine Ruheenergie von etwa 10^{25} eV, also 13 Größenordnungen über der maximal messbaren Energie vom LHC, was ihre Entdeckung an einem Teilchenbeschleuniger praktisch unmöglich macht.
