Musterlösung Thermodynamik 2

Besprechung in der Woche vom 23.04.18 bis 27.04.18

Anmerkung: Es wird jede Aufgabe bepunktet, nicht jede Teilaufgabe.

Teil A: Verständnisaufgaben

Aufgabe 1 – Nullter Hauptsatz

Fassen Sie kurz zusammen, was der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik besagt.

Lösung:

- Aus Vorlesung: „*Befinden sich zwei Körper im thermischen Gleichgewicht mit einem dritten, so stehen sie auch untereinander im thermischen Gleichgewicht. Sie haben in diesem Fall die gleiche Temperatur.*“
- In eigenen Worten: Der Nullte Hauptsatz besagt, dass die Temperatur jene Zustandsgröße ist, die uns sagt, dass zwei oder mehr Systeme im thermischen Gleichgewicht sind. Die Temperatur ist also eine Art Maß dafür, ob zwei thermodynamische Systeme im Gleichgewicht sind.
- Aus Thermodynamik für das Bachelorstudium, von Prof. Dr. Klaus Stierstadt; S. 19 „*Er besagt nämlich, dass man mit einem Gerät zur Temperaturmessung verschiedene Systeme bezüglich ihres thermischen Gleichgewichts eindeutig charakterisieren kann. Das ist nicht von vornherein selbstverständlich. Denn zwar haben die Systeme 1 und 2 die gleiche Temperatur wie das System 3, wenn sie separat mit ihm im thermischen Gleichgewicht sind. Aber es könnte ja sein, dass 1 und 2 beim thermischen Kontakt untereinander noch eine andere Wechselwirkung besitzen, die vorher durch die wärmeundurchlässige Trennwand unterbunden war, und dass sich ihre Temperatur durch diese andere Wechselwirkung verändert. Die Erfahrung sagt uns, dass so etwas nicht vorkommt, und genau das ist die Aussage des nullten Hauptsatzes.*

  Nur wenn er gilt, kann man sich auf die Anzeige eines Thermometers verlassen. [...] Der nullte Hauptsatz gilt in der Physik uneingeschränkt, auch wenn die Bestandteile der Systeme komplexere Einheiten sind als einzelne Atome oder Moleküle, zum Beispiel Kolloidteilchen, Kristalle, Mizellen oder Lebewesen.[...].

  Als Quintessenz dieses Abschnitts wollen wir festhalten: Thermisches Gleichgewicht zwischen mehreren Systemen von Teilchen bedeutet gleiche Temperatur.“

Aufgabe 2 – Das ideale Gas

(a) Auf welchen Annahmen basiert das ideale Gas?

Lösung:

- Gasteilchen (Atome, Moleküle) starre Kugeln, d.h nicht verformbar.
- Durchmesser der Teilchen sehr klein im Gegensatz zum Abstand untereinander und zur Raumgröße.
- Gastteile erfahren untereinander bzw. mit den Wänden des Volumens nur vollkommen elastische Stoßvorgänge.
- Außer den Stößen gibt es keine weiteren Wechselwirkungen (d.h. beispielsweise, dass es elektrisch neutral ist).

(b) Beschreiben Sie kurz den Unterschied der Größen $\tilde{n}$ und N in den beiden Darstellungen der idealen Gasgleichung.

$$pV = \tilde{n}RT = Nk_B T$$

Lösung:

- $[\tilde{n}]$ = mol; Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso vielen Einzelteilchen besteht, wie Atome in 12 Gramm des Nuklids Kohlenstoff-12 enthalten sind. Somit ist die Teilchenzahl in einem Mol gleich der Avogardoconstante $1mol = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$.
- $[N]$ = Einheitenlos; da N die Gesamtanzahl der Teilchen im System meint, also wirklich die absolute Zahl der Atome/Molekühle im System. Da diese Zahl meist unfassbar groß ist, rechnet man lieber mit der Teilchenzahl in Mol, da die Anzahl Mol deutlich leichter zu bestimmen ist.

Aufgabe 3 – Temperaturskala

Welche praktische Überlegung hatten sowohl Daniel Fahrenheit als auch Lord Kelvin bei der Festlegung ihrer Temperaturskala?

Lösung: Beide versuchten bei ihrer Temperaturskala negative Temperaturen zu vermeiden. Fahrenheit wählte als Nullpunkt die tiefste Temperatur, die er damals erzeugen konnte, während Lord Kelvin über die Wärmekapazität auf den absoluten Nullpunkt extrapolierte. In beiden Fällen handelt es sich also um eine absolute/thermodynamische Temperaturskala, d.h. eine Temperaturskala, welche den absoluten Nullpunkt als T = 0 setzt.

Aufgabe 4 – Temperaturausgleich

Gegeben seien vier identische Körper K_1,K_2,K_3 und K_4 mit unterschiedlichen Temperaturen. Die 4 Körper werden zwischen rotierbare Wände gestellt. Dabei sind zwei diathermisch (lassen Temperaturausgleich zu) und zwei adiabatisch (lassen keinen Temperaturausgleich zu). Zu Anfangs haben die 4 Körper die Temperaturen $T_1 = 200\,\mathrm{K}$, $T_2 = 265\,\mathrm{K}$, $T_3 = 350\,\mathrm{K}$ und $T_4 = 285\,\mathrm{K}$.

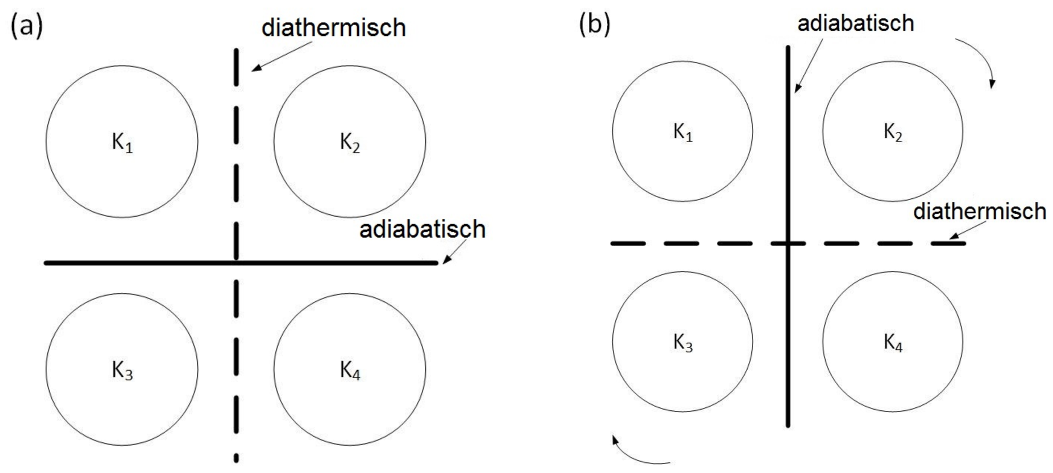


Abbildung 1: Die vier Körper in Grundposition. Abbildung 2: Die vier Körper nach der Rotation.

(a) Zunächst werden die Körper, wie auf Fig. 1 dargestellt, positioniert. Berechnen Sie die Temperaturen aller 4 Körper nachdem das thermische Gleichgewicht eingetreten ist.

Lösung: Da jeweils $K_1 - K_2$ und $K_3 - K_4$ durch eine diathermische Wand getrennt sind, werden diese ins thermische Gleichgewicht kommen. Da die Körper wie in der Aufgabenstellung angegeben in ihren Eigenschaften identisch sind, ist die Gleichgewichtstemperatur lediglich der Mittelwert:

$$T_{12}^{GG} = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{200 + 265}{2}\,\mathrm{K} = 232,5\,\mathrm{K},$$
$$T_{34}^{GG} = \frac{T_3 + T_4}{2} = \frac{350 + 285}{2}\,\mathrm{K} = 317,5\,\mathrm{K}.$$

(b) Danach werden die Wände um 90°C gedreht, sodass die Körper, wie auf Fig. 2 dargestellt, positioniert sind. Berechnen Sie wieder die Temperaturen aller 4 Körper nachdem das thermische Gleichgewicht eingetreten ist.

Lösung: Nun werden jeweils die Körper $K_1 - K_3$ und $K_2 - K_4$ ins thermische Gleichgewicht kommen. Da aber $K_1 - K_2$ und $K_3 - K_4$ nun die selbe Temperatur haben, wird sich für alle Körper die selbe Temperatur ergeben. Selbige Rechnung wie bei der (a) führt zu

$$T_{1234}^{GG} = \frac{T_{12}^{GG} + T_{34}^{GG}}{2} = \frac{232,5 + 317.5}{2}\,\mathrm{K} = 275\,\mathrm{K}.$$

Aufgabe 5 – Systeme im Gleichgewicht

Kreuzen Sie die folgenden Systeme an, die sich in absehbarer Zeit ($\leq$ 1 Tag) ins thermische Gleichgewicht begeben oder aber bereits im thermischen Gleichgewicht befinden.

(a) Ein Raum mit offenem Fenster und ausgeschalteter Heizung (x)

(b) Ein Raum mit offenem Fenster und angeschalteter Heizung ( )

(c) System Erde-Sonne ( )

(d) Kaffee steht offen in der Küche (x)

Teil B: Rechenaufgaben

Aufgabe 6 – Temperaturskalen

Zeichnen und beschreiben Sie die folgenden beiden Temperaturskalen:

(a) Eine „Celsius–Skala“ auf der Basis von Eisen anstelle von Wasser (Einheit °E; Grad Eisen). Zeichnen Sie zunächst Schmelz- und Siedepunkt von Eisen in ein T[K]–T[°E] Diagramm ein. Dann teilen Sie diese Temperaturdifferenz in 100 Teile und berechnen daraus, wie viel °E einem Kelvin entspricht. Schließlich rechnen Sie 0 und 273 Kelvin in °E um.

Lösung: Wir entnehmen Wikipedia die beiden charakteristischen Temperaturen von Eisen: Schmelztemperatur, 1811 K, und Siedetemperatur, 3272 K.

Wir definieren nun: $T(1811\,\mathrm{K}) \equiv 0°\mathrm{E}$ und $T(3273\,\mathrm{K}) \equiv 100°\mathrm{E}$.

Da die in der Aufgabenstellung beschriebene Konstruktion lediglich eine lineare Abbildung zwischen den beiden Temperaturskalen beschreibt, nehmen wir als Ansatz

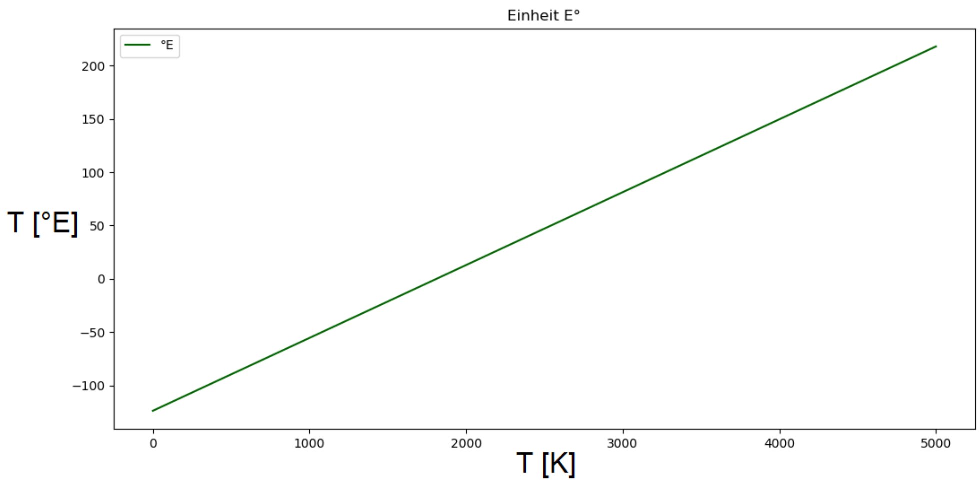
$$T[°\mathrm{E}] = A \cdot T[\mathrm{K}] + B, \qquad A, B = const.,$$

wobei $T[\mathrm{K}]$ bzw. $T[°\mathrm{E}]$ die Temperatur in Kelvin bzw. Grad Eisen bezeichnet. Die beiden obigen Bedingungen liefern dann ein 2D lineares Gleichungssystem. Dieses kann schnell gelöst werden und liefert

$$T[°\mathrm{E}] = \frac{T[\mathrm{K}]}{14{,}62\mathrm{K}}\,°\mathrm{E} - 123{,}87°\mathrm{E}.$$

Dadurch folgt:

$$T(0\,\mathrm{K}) = -123{,}87°\mathrm{E}$$
$$T(273\,\mathrm{K}) = -105{,}19°\mathrm{E}$$



(b) Eine „absolute Temperaturskala” auf der Basis von Wasser (Einheit °W; Grad Wasser), d.h. mit $0°\mathrm{W} \equiv 0°\mathrm{K}$ und einem Schmelzpunkt bei $100°\mathrm{W}$ anstelle von 273,15 K. Gehen Sie analog zu Aufgabenteil (a) vor.

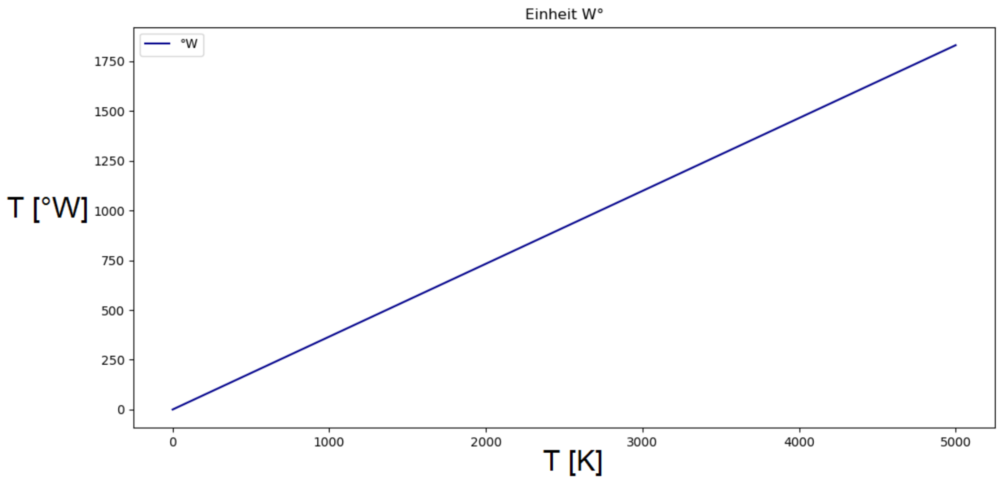
Lösung: Analoge Rechnung wie in Aufgabenteil (a), diesmal jedoch mit $T(0\,\mathrm{K}) \equiv 0°\mathrm{W}$ und $T(273,15\,\mathrm{K}) \equiv 100°\mathrm{W}$.

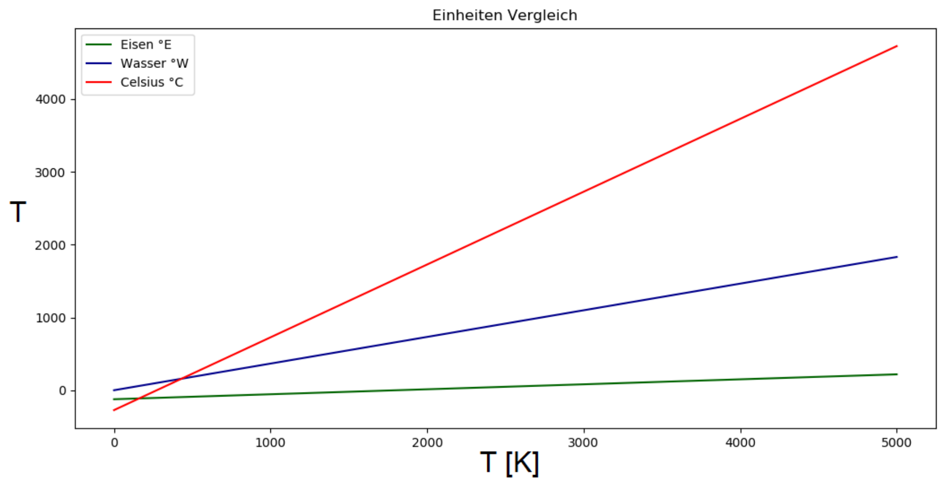
Wir nehmen wieder eine lineare Funktion als Ansatz:

$$T[°\mathrm{W}] = C \cdot T[\mathrm{K}] + D, \qquad C, D = const.$$

Die beiden obigen Bedingungen liefern dann wieder ein 2D lineares Gleichungssystem, welches nach anschließendem Lösen folgenden Ausdruck ergibt:

$$T[°\mathrm{W}] = \frac{T[\mathrm{K}]}{2,7315\mathrm{K}}\,°\mathrm{W}.$$





Aufgabe 7 – Hagelsturm

In einem Hagelsturm treffen die Hagelkörner (2 g) mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s auf ein Fenster mit der quadratischen Fläche 0.5 m x 0.5 m im Winkel von 60 ° vom Lot mit einer Frequenz von 30 Hz. Welchen Druck erzeugt der Hagel? Vergleichen Sie den Hageldruck mit dem atmosphärischen Druck.

Lösung: (Aufpassen! Der Druck verwendet *in dieser Aufgabe* ein großes P während der Impuls ein kleines p verwendet!)

- Wir wissen bereits, dass jede Kraft als Impulsänderung verstanden werden kann: $F = \frac{dp}{dt} \approx \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Der Druck entsteht dadurch, dass kontinuierlich Impuls auf die Scheibe übertragen wird. Folglich kann Druck als Kraft pro Fläche geschrieben werden $P = \frac{F}{A}$.
- Jedes Hagelkorn überträgt beim Aufprall einen gewissen Impuls Δp auf die Fensterscheibe. Wir müssen hier jedoch beachten, dass sich beim Impuls um eine vektorielle Größe handelt. Daher parametrisieren wir im folgenden die Geschwindikeitsvektoren $\vec{v}_i$ in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} |\Delta\vec{p}| &= |\vec{p}_{\text{nach}} - \vec{p}_{\text{vor}}| = m|\vec{v}_{\text{nach}} - \vec{v}_{\text{vor}}| \\ &= m \left| \begin{pmatrix} |v|\sin(\alpha) \\ |v|\cos(\alpha) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |v|\sin(\alpha) \\ -|v|\cos(\alpha) \end{pmatrix} \right| \\ &= 2m|v|cos(\alpha). \end{aligned}$$

  Einsetzen ergibt $|\Delta\vec{p}| = 2m|v|\cos(60°) = 2m|v|\frac{1}{2} = 0,002\,\text{kg} \cdot 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,03\,\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,03\,\text{Ns}$.
- Die Hagelkörner treffen in einer Frequenz von 30 Hz auf. Ein Stoß erfolgt also alle $\Delta t = \frac{1}{f} = \frac{1}{30}$ s.
- Mit unserer Näherung $F = \frac{dp}{dt} \approx \frac{\Delta p}{\Delta t}$ ergibt sich also $F \approx 0,03\,\text{Ns}/(\frac{1}{30}\,\text{s}) = 0,9\,\text{N}$.
- Und somit ergibt sich unter der Benutzung von $A = 0,5\,\text{m} \cdot 0,5\,\text{m} = 0,25\text{m}^2 \implies p = \frac{F}{A} = \frac{0,9\,\text{N}}{0,25\,\text{m}^2} = 3,6\,\text{Pa} = 0,036\,\text{mbar} \ll 1\,\text{bar}$ (Atmosphärendruck).

Aufgabe 8 – Effusion

(a) Ein 75 kg schwerer Astronaut erhält bei einem Weltraumspaziergang durch Aufprall eines Schrottteilchens ein Loch von 1 mm Radius in seinem 100 kg schweren Druckanzug. Welche Kraft übt das ausströmende Gas auf ihn aus, und wie weit wird er dadurch in einer Minute abgetrieben? Nehmen Sie hierbei an, dass der im inneren des Raumanzuges herrschende Druck dem Atmosphärendruck auf der Erde, $p_A = 1,013\,\text{bar}$, entspricht und dass dieser über die Dauer des Ausströmens konstant bleibt.

Lösung:

- Die Fläche des Lochs ist gegeben durch $A = \pi r^2$.
- Umrechnung von bar in Si-Einheiten: $1\,\text{bar} = 10^5\,\text{kg}\,\text{m}^{-1}\,\text{s}^{-2}$.
- Zur Anschaulichkeit gehen wir einen kleinen Umweg über den Impuls. Die Ausströmenden Luftteilchen haben einen Impuls Δp_L. Aufgrund von Impulserhaltung ist dieser betragsmäßig gleich dem Impuls Δp_A den der Astronaut erfährt. Durch Δt teilen ergibt $|F_A| = |F_L|$.
  Somit erhalten wir $|F_A| = p\ A = (1,013 \cdot 10^5\,\text{Nm}^{-2})\ (\pi\ 10^{-6}\,\text{m}^2) = 0,32\,\text{N}$.
- Die zurückgelegte Strecke erhalten wir durch Anwenden der Grundgleichung

$$m\ddot{x} = F = konst. \implies x(t) = \frac{Ft^2}{2m} = \frac{0,32\,\text{N} \cdot 60^2\,\text{s}^2}{2 \cdot 175\,\text{kg}} = 3,30\,\text{m}$$

(b) Nun wollen wir die Annahme eines konstanten Drucks fallenlassen. Benutzen Sie die kinetische Herleitung des Drucks des idealen Gases aus der Vorlesung, um eine typische Zeit abzuschätzen, in der 1l Luft (Molekulargewicht 15 g/mol) bei Raumtemperatur durch ein 1mm Loch in ein äußeres Vakuum entkommt.

Hinweis: Sie sollten auf eine Differentialgleichung kommen, welche mit folgendem Ansatz gelöst wird:

$$N(t) = const \cdot \exp(-t/\tau)$$

Lösung:

- Zunächst wollen wir zwei Annahmen machen: Wir vernachlässigen die Viskosität $\eta = 0$ und wir haben nur ausfließende Teilchen, $p_{außen} = 0$.
- Aus dem Gleichverteilungssatz erhalten wir die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle: $\bar{v} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$.
- Für ein Luftgemisch gilt etwa: $M \approx 15\,\mathrm{gr/mol} \Longrightarrow m = M/N_A \approx 2,5 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$.
- Dann wissen wir aus der Vorlesung:

$$p = \frac{\Sigma \Delta p_i}{\Delta t \cdot A} = \frac{N \Delta \bar{p}}{\Delta t \cdot A} = \frac{(1/6\ nA\bar{v}\Delta t)(2m\bar{v})}{\Delta t \cdot A},$$

wobei Δp_i den Impulsübertrag des i-ten Teilchens darstellt. Für diese Aufgabe interessiert uns nur der Teil, der die Anzahl auftreffenden Moleküle beschreibt (1D statt 3D):

$$\Delta N = N_{\text{reflektierte Teilchen}} - N_{\text{auftreffende Teilchen}} = -\frac{1}{2} nA\bar{v}\Delta t = -\frac{1}{2}\frac{N}{V}A\bar{v}\Delta t$$
$$\Longrightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} \approx \frac{dN}{dt} = -\frac{A\bar{v}}{2V}\ N$$

- Lösen dieser Differentialgleichung mit dem angegebenen Ansatz oder Separation der Variablen ergibt

$$N(t) = N_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$$

mit $\tau = \frac{2V}{A\bar{v}} = \frac{2V}{A}\sqrt{\frac{m}{3k_B T}} \approx 2,9\,\mathrm{s}$

Aufgabe 9 – Luftblase in Flüssigkeiten

Zwei gleichgroße Luftblasen steigen in zwei Flüssigkeiten von gleicher und konstanter Temperatur auf, die eine in Wasser, die andere in Glyzerin. Dabei wächst ihr Volumen, weil der hydrostatische Druck mit der Höhe abnimmt. Die Blase in Wasser steigt so schnell, dass mit der umgebenden Flüssigkeit praktisch keine Wärme ausgetauscht wird (adiabatischer Vorgang). Die andere in Glyzerin, steigt wegen dessen größerer Viskosität so langsam, dass sie ständig im thermischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung bleibt (Siehe Abb. 3).

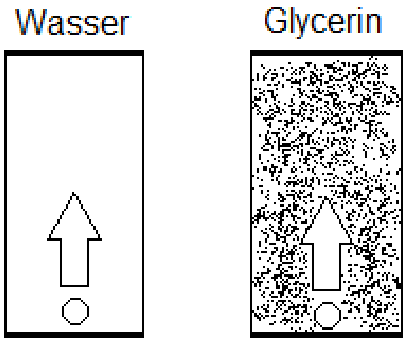


Abbildung 3: Aufteigende Luftblasen in Wasser (links) und Glycerin (rechts).

(a) Durch welche Gleichungen werden isochore, isobare, isotherme und adiabatische Zustandsänderungen idealer Gase beschrieben?

Lösung:

$$
\begin{aligned}
&Isochor: && V = const. \\
&Isobar: && p = const. \\
&Isotherm: && T = const. \implies Nk_B T = const. \implies V = \frac{const.}{p}. \\
&Adiabatisch: && pV^\gamma = const. \implies V = \left(\frac{const.}{p}\right)^{1/\gamma}.
\end{aligned}
$$

(b) Skizzieren Sie im pV–Diagramm den Verlauf einer Isobaren, Isochoren, Isothermen und Adiabaten.

Lösung:

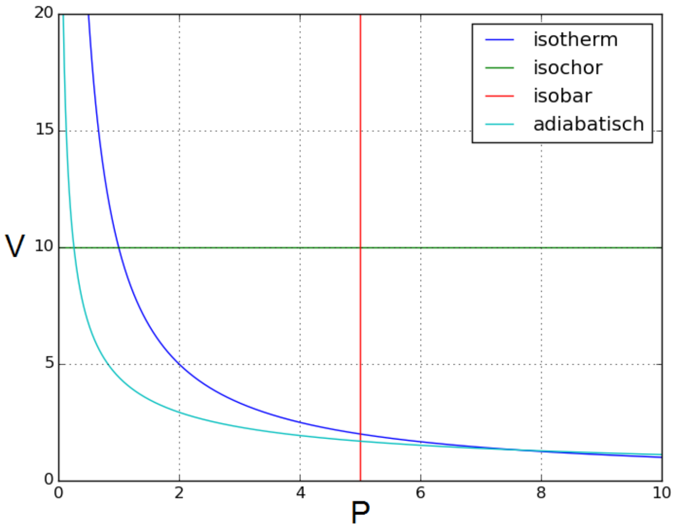


Abbildung 4: p-V-Diagramm eines idealen Gases (adiabatenexponent = 5/3) und NK = 10.

(c) Nutzen Sie ihr Wissen aus den vorherigen beiden Teilaufgaben um festzustellen, welche Blase kleiner ist, wenn sie oben ankommt.

Lösung: Glycerin Wenn man die Luft innerhalb der Blase näherungsweise als ideales Gas annimmt, so gilt an jeder Stelle die ideale Gasgleichung. Damit ergibt sich für den obersten und untersten Punkt der Rohre:

$$p_o^G V_o^G = Nk_B T_o^G$$
$$p_u^G V_u^G = Nk_B T_u^G.$$

Durch Division der beiden folgt

$$\frac{V_o^G}{V_u^G} = \frac{T_o^G}{T_u^G} \frac{P_u^G}{P_o^G}.$$

Da die Luftblase langsam genug nach oben steigt und somit die Lufttemperatur innerhalb der Blase die Temperatur des umgebenden Glycerins annimmt, gilt $T_o = T_u$ und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{V_o^G}{V_u^G} = \frac{P_u^G}{P_o^G} > 1$$

Wasser Da die Zustandsänderung adiabatisch verläuft, nehmen wir die Adiabatengleichung mit Adiabatenexponent $\gamma = 5/3$ für ein ideales Gas her:

$$\frac{V_o^W}{V_u^W} = \left(\frac{P_u^W}{P_o^W}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{P_u^W}{P_o^W}\right)^{3/5} < \frac{P_u^W}{P_o^W} < \frac{P_u^G}{P_o^G} = \frac{V_o^G}{V_u^G},$$

wobei wir für die zweite Ungleichheit benutzt haben, dass die Dichte von Wasser niedriger ist als die Dichte von Glycerin. Da beide Luftblasen am unteren Punkt mit dem selben Volumen angefangen haben, erhalten wir $V_o^W < V_o^G$. Somit expandiert die Luftblase im Wasser weniger als in Glycerin.
