Musterlösung Thermodynamik 3

Besprechung in der Woche vom 30.04.18 bis 04.05.18

Anmerkung: Es wird jede Aufgabe bepunktet, nicht jede Teilaufgabe.

Teil A: Verständnisaufgaben

Aufgabe 1 – Gleichverteilungssatz

Erklären sie kurz die Aussage des Gleichverteilungssatzes.

Lösung: Aus Vorlesung 3 zum Gleichverteilungssatz oder auch Äquipartitionstheorem: ,,Wenn sich ein System im *thermischen Gleichgewicht* befindet, entfällt auf jeden *quadratischen Freiheitsgrad im Mittel* eine Energie von $1/2\ k_B T$ pro Teilchen."
Des Weiteren dürfen diese Freiheitsgrade nicht „eingefroren“ sein, das heißt, diese Freiheitsgrade müssen tatsächlich angeregt werden.

Aufgabe 2 – 1. Hauptsatz

Wie lautet die mathematische Form des 1. Hauptsatzes? Was sagt dieser qualitativ aus?

Lösung: Aus Vorlesung: Die Änderung der inneren Energie eines Systems ΔU ist gleich der Summe aus der netto zugeführten Wärme ΔQ und der netto zugeführten Arbeit ΔW:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

Der 1. Hauptsatz beschreibt also die Energieerhaltung in thermodynamischen Systemen.

Aufgabe 3 – Längen– und Volumenausdehnung

(a) In der Vorlesung hatten wir die Längenausdehnung von 1,0 m langen Rohren aus Aluminium und Quarzglas gemessen. Dabei wurden die Rohre von Hörsaaltemperatur ($T_1 \approx 25°\mathrm{C}$) mit Wasserdampf auf $T_2 \approx 100°\mathrm{C}$ geheizt. Dabei wurde eine Ausdehnung von $\Delta L = 1{,}73\,\mathrm{mm}$ und 0,045 mm gemessen. Berechnen Sie aus diesen Angaben die thermischen Ausdehnungskoeffizienten von Aluminium und Quarzglas. Vergleichen Sie mit Literaturwerten.

Lösung:

$$\alpha_{Al} = \frac{\Delta L}{L\ \Delta T} = \frac{0,00173\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m} \cdot 75°\mathrm{C}} = 2,31 \cdot 10^{-5}/°\mathrm{C}.$$

Literaturwert (z.B. aus den Vorlesungsfolien) ist $23 \cdot 10^{-6}/°\mathrm{C}$.

$$\alpha_{Quarzglas} = \frac{\Delta L}{L\ \Delta T} = \frac{4,5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m} \cdot 75°\mathrm{C}} = 6,0 \cdot 10^{-7}/°\mathrm{C}.$$

Literaturwert (z.B. `https://de.wikipedia.org/wiki/Quarzglas`) ist $0{,}54 \cdot 10^{-6}/°\mathrm{C}$.

Beide Messwerte sind also in guter Übereinstimmung (auf 10 % genau) mit den Literaturwerten.

(b) Leiten Sie den Volumenausdehungskoeffizienten eines idealen Gases her.

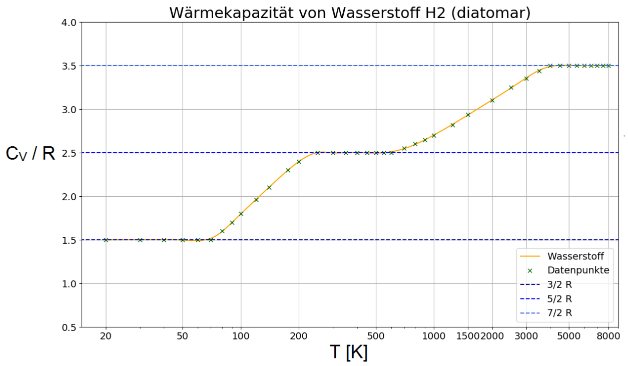
Lösung:

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{Nk_B T}{p}\right)_{p,N} = \frac{Nk_B}{pV} = \frac{1}{T}$$

Aufgabe 4 – Wärmekapazität

(a) Skizzieren Sie die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität C_V eines zweiatomigen Gases.

Lösung:



(b) Warum ist die Wärmekapazität bei konstantem Druck C_p größer als die Wärmekapazität bei konstantem Volumen C_V?

Lösung:

- Im Fall von konstantem Volumen gilt $dV = 0$ und somit auch $dW = 0$. Es kann also keinerlei mechanische Arbeit verrichtet werden. Zugeführte Energie schlägt sich also direkt in einer Temperaturerhöhung wieder.
- Im Fall von konstantem Druck, ist ein Stoff (z.B. ein Gas) in der Lage zu expandieren. Energie kann also in mechanische Arbeit umgewandelt werden, wodurch die Energiezufuhr sich nicht in einer Temperaturerhöhung niederschlägt. Der Stoff ist also in der Lage mehr Energie pro Kelvin aufzunehmen, da ein teil der Energie in Arbeit umgesetzt wird.

Aufgabe 5 – Van–der–Waals Gas und Phasenübergänge

(a) Auf welchen zusätzlichen Annahmen beruht das Van–der–Waals Gas im Gegensatz zum idealen Gas? Gehen Sie hierbei insbesondere auf die Größen a und b in der VdW–Gleichung ein.

Lösung: Van–der–Waals Gleichung:

$$p = \frac{\tilde{n}RT}{V - \tilde{n}b} - \frac{\tilde{n}^2 a}{V^2} \tag{1}$$

Beim VdW Gas ist im Gegensatz zum idealen Gas zusätzlich zu beachten:

– Eigenvolumen(Kovolumen) der Teilchen. Teilchen können sich nie näher als $2r$ kommen, daher muss dieser dem ursprünglichen V abgezogen werden: $V \longrightarrow V - \tilde{n}b$.

– Anziehende Kräfte zwischen Teilchen. Während sich diese im inneren des Gases aufheben, resultiert an der Grenzfläche eine nach innen gerichtete Kraft und somit eine Reduktion des Drucks $\propto \tilde{n}^2/V^2$. Die Proportionalitätskonstante ist hierbei der Kohäsionsdruckparameter a. Dieser zusätzliche Binnendruck(kohösionsdruck) reduziert den Gesamtdruck.

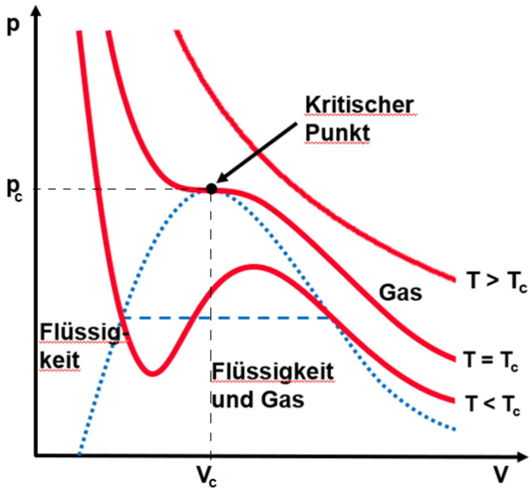
  Anmerkung: Es braucht keine explizite Herleitung der zusätzlichen Terme, die Erklärung der Idee und der Parameter a und b genügt.

(b) Welchen Phasenübergang kann die Van-der-Waals-Gleichung erklären?

Lösung: Die Van-der-Waals-Gleichung erklärt den Phasenübergang von gasförmig nach flüssig. Diesen Phasenübergang kann die ideale Gasgleichung nicht erklären, da sich ein ideales Gas aufgrund der fehlenden Anziehung zwischen den Teilchen niemals verflüssigen würde.

(c) Wird eine Flüssigkeit kritisch, wenn $T < T_c$ und $p > p_c$?

Lösung: Wenn man auf dem Bild die Isotherme mit $T < T_c$ entlangfährt bis $p > p_c$ gilt, erkennt man, dass das Gas in diesem Bereich nicht kritisch ist.



(d) Erklären Sie was latente Wärme ist.

Lösung: Aus Vorlesung 4: „Die latente Wärme ist die Wärme ΔQ in J, die von einem Körper während eines Phasenüberganges aufgenommen oder abgegeben wird. Die Temperatur T ändert sich währenddessen nicht."

Sie hängt ab von der Art des Phasenüberganges und des Stoffes sowie von seiner Menge. Manchmal verwendet man auch die Begriffe „Schmelzwärme" oder „Verdampfungswärme" Im Gegensatz dazu heißt die für eine Temperaturerhöhung aufgebrachte Energiemenge fühlbare Wärme.

Teil B: Rechenaufgaben

Aufgabe 6 – Freie Weglänge von Argon

Im folgenden wollen wir uns mit der mittleren freien Weglänge von Argon bei physikalischen Normalbedingungen ($T = 273,15\,\mathrm{K},\ P = 1,01325\,\mathrm{bar}$) befassen. Argon hat einen Atomradius von 0,19 nm.

(a) Wie hängt die mittlere freie Weglänge vom Gasdruck ab?

Lösung:

- Mittlere freie Weglänge für untereinander stoßende Teilchen: $l = 1/(\sqrt{2}n\sigma)$.
- Für ein ideales Gas gilt $n = p/(k_B T)$, sodass

$$l = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\sigma p}.$$

(b) Wie groß ist diese für Argon bei physikalischen Normalbedingungen?

Lösung: Der Stoßquerschnitt einer Kugel ist $\sigma = 4\pi r^2$, somit erhalten wir

$$l = \frac{k_B \cdot 273,15\,\mathrm{K}}{\sqrt{2} \cdot 4\pi \cdot (0,19 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m})^2 \cdot 1,01325 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}} = 58\,\mathrm{nm}.$$

(c) Ab welchem Druck in einer großen Vakuumkammer mit dem Durchmesser $d = 50\,\mathrm{cm}$ stoßen die Moleküle des Restgases in der Kammer nur noch mit den Wänden und nicht mehr untereinander.

Lösung: Damit nur mit den Wänden gestoßen wird muss gelten $l \geq 0,5\,\mathrm{m}$. Umstellen auf p und einsetzen ergibt

$$p \leq \frac{k_B \cdot 273,15\,\mathrm{K}}{\sqrt{2} \cdot 4\pi \cdot (0,19 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m})^2 \cdot 0,5\,\mathrm{m}} = 1,18 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{Pa} = 1,18 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{bar}.$$

Aufgabe 7 – Thermodynamische Freiheitsgase

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade des Gases O_2.

Lösung:

- Quantenmechanische Formel für Freiheitsgrade in einem Molekül: $3N = f_T + f_R + \nu_S$, wobei N Anzahl der Atome im Molekül, f_T Translationsfreiheitsgrade, f_R Rotationsfreiheitsgrade, ν_S Schwingungsmoden im Molekül.
- Für das O_2–Atom gilt: $N = 2,\ f_T = 3, f_R = 2$. Somit ergibt sich $\nu_S = 3 \cdot 2 - 3 - 2 = 1$.
- In jeder Schwingungsmode kann sowohl potentielle, als auch kinetische Energie gespeichert werden $\Longrightarrow f_S = 2\nu_S = 2$.
- Das Sauerstoffmolekül hat also insgesamt $f = f_T + f_R + f_S = 3 + 2 + 2 = 7$ Freiheitsgrade.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade des Gases H_2O (Wasserdampf).

Lösung:

- Wieder hernehmen der Quantenmechanischen Formel für Freiheitsgrade in einem Molekül: $3N = f_T + f_R + \nu_S$.
- Für das H_2O–Atom gilt: $N = 3$, $f_T = 3$, und da die Atome nicht in einer Linie angeordnet sind, $f_R = 3$. Somit ergibt sich $\nu_S = 3 \cdot 9 - 6 = 3$.
- In jeder Schwingungsmode kann sowohl potentielle, als auch kinetische Energie gespeichert werden $\Longrightarrow f_S = 2\nu_S = 6$.
- Das Wassermolekül hat also insgesamt $f = f_T + f_R + f_S = 3 + 3 + 6 = 12$ Freiheitsgrade.

(c) Wie viele Freiheitsgrade hat die Molekülschwingung eines Atoms im (klassischen) Festkörper? .

Lösung:

- Dulong-Petit-Gesetz: $C_V = 3R$.
- Vergleich mit Formel für die Wärmekapazität: $C_V = 1/2\ f\ R \longrightarrow f = 6$.
- Da in einem Festkörper $f_T = f_R = 0$ gilt, finden wir $f = f_T + f_R + f_S \Longrightarrow 2\nu = f_S = f = 6$ und somit $\nu = 3$.

Aufgabe 8 – Mechanisches Wärmeäquivalent

In der Vorlesung hatten wir gemessen, wie stark das Senken einer Masse im Schwerefeld eine gewisse Menge Wasser erwärmt. Im Versuch wurde eine Masse von 5 kg insgesamt um 30 m abgesenkt (durch das Drehen einer Achse). Dabei wurden $m_W = 60\,\mathrm{g}$ Wasser und insgesamt $m_{Cu} = 130\,\mathrm{g}$ Kupfer um $\Delta T = 5\,\mathrm{K}$ erwärmt. Die spezifische Wärmekapazität von Kupfer beträgt $c_{Cu} = 385\,\mathrm{J/(kg\ K)}$.

a) Berechnen Sie aus diesen Angaben die spezifische Wärmekapazität von Wasser c_W.

Lösung:

- Wir nehmen den 1. Hauptsatz für einen adiabatischen Prozess her: $\Delta U = \Delta W$.
- Die innere Energie ist gegeben durch $\Delta U = (m_{H_2O} c_{H_2O} + m_{Cu} c_{Cu})\Delta T$.
- Dem System wir folgende Arbeit zugefügt: $\Delta W = -p\Delta V = -(F/A) \cdot A(h_E - h_A) = F(h_A - h_E) = mg\Delta h$.
- Einsetzen und Umstellen ergibt

$$c_{H_2O} = \frac{\frac{mg\Delta h}{\Delta T} - m_{Cu} c_{Cu}}{m_{H_2O}} = 4,07\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\ K}}, \qquad \text{Ortsfaktor:} g = 9,81\,\mathrm{m/s}^2.$$

b) Vergleichen Sie das Ergebnis der letzten Teilaufgabe mit dem Literaturwert für die Wärmekapazität von Wasser, d.h. mit der Definition der Kalorie.

Lösung: Definition Kalorie: 4,18 J. Das Ergebnis ist also in guter Übereinstimmung (auf 0,26 % genau).

c) Vergleichen Sie den angegebenen Wert von c_{Cu} mit der Vorhersage für die molare Wärmekapazität von Festkörpern nach Dulong-Petit.

Lösung:

- Molare Masse von Kupfer ist 63,55 g/mol. Folglich gilt:
  $C_{Cu,mol} = c_{cu} M_{mol} = 385\,\mathrm{J/(kg\ K)} \cdot 63,55 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol} = 24,47\,\mathrm{J/(mol\ K)}$.
- Dulong-Petit Vorhersage ist $C_{mol} = 3R = 24{,}9\,\mathrm{J/(mol\ K)}$, d.h. der Literaturwert ist also sehr nahe an der Abschätzung von Dulong-Petit.

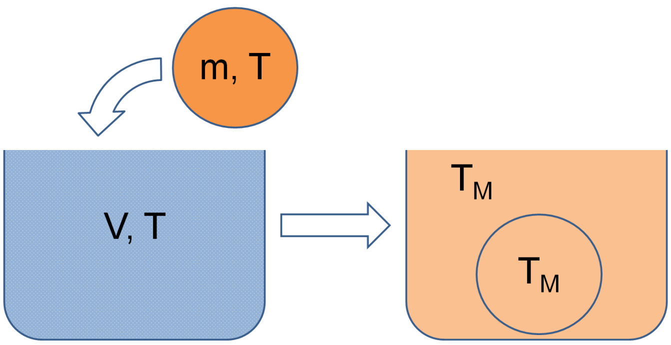
---

d) Sie trinken schnell eine Maß (1,0 l) Bier (Schanktemperatur 8°C; Sie können die Wärmekapazität von Bier durch Wasser nähern). Vergleichen Sie den Verlust an Wärmeenergie Ihres Körpers mit dem Energiegewinn durch den "Brennwert" des Bieres. *Achtung: "Essenskalorien" sind Kilokalorien!*

Lösung: Der "Brennwert" von 1,0 l Bier beträgt laut Internet 430 kcal = 1800 kJ.
Verlorene Wärmeenergie: $\Delta Q = mc_V \Delta T = 1\,\mathrm{kg} \cdot\ 4,186\,\mathrm{kJ/(kg\ °C)} \cdot (37-8)°C = 121\,\mathrm{kJ}$.
$\Longrightarrow$ Der kalorische Brennwert ist wesentlich größer als der Wärmeverlust!

Aufgabe 9 – Kaloriemetrie

Ein beliebtes experimentelles Verfahren zum Bestimmen der Wärmekapazität eines Stoffes, ist die sogenannte Kalorimetrie. Hierbei wird ein Wasserbad bekannten Volumens verwendet und der Stoff, der vermessen werden soll, zunächst gewogen, dann auf eine festgelegte Temperatur erhitzt und anschließend in das Wasserbad geworfen, wo die Temperaturerhöhung des Wassers gemessen wird. Anschließend kann aus der Mischtemperatur, die sich einstellt, die Wärmekapazität (bezüglich Masse) des Stoffes bestimmt werden.



Im Folgenden soll die Wärmekapazität von Marmor bestimmt werden. Dazu wird ein Block Marmor mit Masse $m = 2,5\,\mathrm{kg}$ zunächst auf $T_{Marmor} = 85,0°\mathrm{C}$ erhitzt und anschließend in ein Wasserbad von 10 Liter Wasser mit Temperatur $T_{H_2O} = 20,0°\mathrm{C}$ geworfen. Es bildet sich nun ein thermisches Gleichgewicht mit Mischtemperatur $T_M = 23,25°\mathrm{C}$. Berechnen Sie die spezifische Wärmekapazität von Marmor. Die spezifische Wärmekapazität von Wasser beträgt $c_{H_2O} = 4,186\,\mathrm{kJ/(kg\ K)}$.

Lösung: Wir verwenden folgende Gleichung, die der thermodynamischen Energieerhaltung (1. Hauptsatz) entspricht:

$$Q_{H_2O} + Q_{Marmor} = Q_M$$

$$\Rightarrow c_{H_2O} \cdot m_{H_2O} \cdot T_{H_2O} + c_{Marmor} \cdot m_{Marmor} \cdot T_{Marmor} = c_{H_2O} \cdot m_{H_2O} \cdot T_M + c_{Marmor} \cdot m_{Marmor} \cdot T_M$$

Diese Gleichung müssen wir nun nach c_{Marmor} umstellen:

$$c_{Marmor} = \frac{c_{H_2O} \cdot m_{H_2O} \cdot (T_M - T_{H_2O})}{m_{Marmor} \cdot (T_{Marmor} - T_M)} = \frac{4,186\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 10\,\text{kg} \cdot (23,25°\text{C} - 20,0°\text{C})}{2,5\,\text{kg} \cdot (85,0°\text{C} - 23,25°\text{C})} \approx 0,88\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

Aufgabe 10 – Teilchengeschwindigkeit in der Sonne

Im inneren der Sonne wird die Teilchendichte der Protonen und der Elektronen auf $5 \cdot 10^{29}\,\text{m}^{-3}$ geschätzt. Die Temperatur beträgt etwa $1,5 \cdot 10^7\,\text{K}$.

1. Welche mittlere Energie haben die Protonen und Elektronen?

Lösung: Ziel der Aufgabe ist, dass man sich darüber klar wird, dass die Konzepte aus der Grundvorlesung E2, die man gemeinhein für Gase ableitet, auch auf andere Systeme wie z.B. Protonen- und Elektronenplasmen angewendet werden können.

$$U = \frac{3}{2} k_B T = 3,1 \cdot 10^{-16}\,\text{J} = 1,9\,\text{keV}.$$

---

2. Vergleichen Sie diesen Wert mit der Ionisierungsenergie $E_H = 13,6\,\text{eV}$ des H-Atoms.

Lösung: Der obige Wert ist viel größer als die Ionisierungsenergie. Die Annahme, dass Elektronen und Protonen getrennt sind, ist also richtig.

---

3. Wie groß sind ihre mittleren Geschwindigkeiten?

Lösung: Die mittleren Geschwindigkeiten errechnen sich aus (siehe Vorlesung)

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}}.$$

Aufgrund der verschiedenen Massen ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$) erhält man

$$\bar{v}_p = 5,6 \cdot 10^5\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$
$$\bar{v}_e = 2,4 \cdot 10^7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Anmerkung: Es ist an dieser Stelle in Ordnung die Näherung $\bar{v} \approx \sqrt{\bar{v^2}}$ zu verwenden, man sollte sich jedoch darüber bewusst sein, dass es nur eine Näherung ist.

---

4. Wie groß ist der Druck p?

Lösung: Der Druck errechnet sich aus der idealen Gasgleichung (n ist die Teilchendichte):

$$p = n k_B T = 1 \cdot 10^{14}\,\text{Pa}.$$
