Übungsblatt Elektrodynamik 1

Besprechung in der Woche vom 04.06.18 bis 08.06.18

Teil A: Verständnisaufgaben

Aufgabe 1 – Ladungen auf einem Kreisumfang

Diese Aufgabe bringt bis zu 2 Punkte

(a) Fünf Ladungen jeweils mit Ladung q sind symmetrisch, also äquidistant, auf einem Kreis mit Radius R verteilt. Wie stark ist das elektrische Feld E in der Mitte des Kreises?

(b) Was ist das elektrische Potential in der Mitte des Kreises?

Aufgabe 2 – Feldlinien

Diese Aufgabe bringt bis zu 2 Punkte

(a) Beschreiben Sie kurz was sogenannte Feldlinien sind. Warum wurden Feldlinien eingeführt? Von welcher Ladung gehen sie zu welcher Ladung? Warum wurde diese Richtung gewählt?

(b) Skizierren Sie die Feldlinien, wenn nur eine einzelne punktförmige positive Ladung in einem Volumen V zu finden ist.

(c) Skizzieren Sie die Feldlinien zwischen einer positiv geladenen Platte und einer negativ geladenen Platte.

Aufgabe 3 – geladene Kugelschalen

Zwei sehr dünne Kugelschalen mit Radius d mit konstanter Ladungsdichte ρ_0 und Gesamtladung Q befinden sich in einem Abstand von $10d$. Nun wird eine Probepunktladung q innerhalb der einen Kugelschale und $d/2$ rechts vom Mittelpunkt der linken Kugelschale positioniert (siehe Abbildung). Welche Kraft wirkt auf die Probeladung q unter der Annahme, dass die Kugelschalen ortsfest sind? In welche Richtung wirkt diese Kraft?

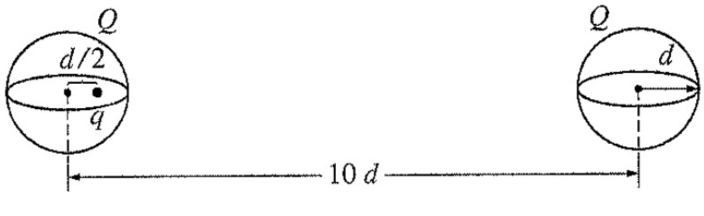

Abbildung 1: Skizze der geladenen Kugelschalen mit Radius d und der Probeladung q innerhalb der einen Kugelschale.

Aufgabe 4 – Integralsatz von Gauß

Eine in der y-z-Ebene unendlich ausgedehnte Fläche mit konstanter Flächendichte σ schneidet eine Kugel mit Radius R im Abstand x (siehe Abbildung). Bestimmen sie den elektrischen Fluss Φ durch die Kugel, die sie als Gaußfläche betrachten dürfen.

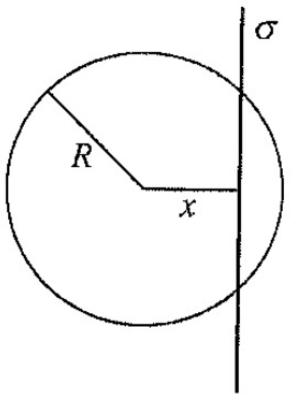

Abbildung 2: Skizze der Kugel und der unendlich ausgedehnten Fläche in 2D

Aufgabe 5 – Elektrostatisches Potential

Ein dünner, nicht leitender Ring mit Radius R, konstanter Ladungsdichte und mit Gesamtladung Q befindet sich ortsfest in der y-z Ebene. Bestimmen sie das elektrostatische Potential φ im Punkt P, der auf der Symmetrieachse durch den Ring liegt und der einen Abstand x vom Ringmittelpunkt entfernt ist (siehe Skizze).

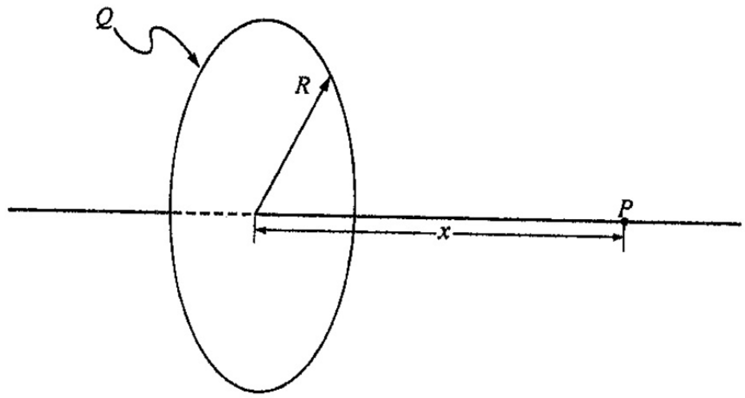

Abbildung 3: Ring mit Gesamtladung Q und Punkt P auf der Symmetrieachse des Kreises

Teil B: Rechenaufgaben

Aufgabe 6 – Diffusion

(a) Was sind die Diffusionskoeffizienten für ein kleines Molekül (z.B. Glukose; $R \sim 1\ nm$), ein typisches Protein ($R \sim 5\ nm$) und ein Bakterium ($R \sim 1\ \mu m$), die sie jeweils als Kugeln nähern können, bei Raumtemperatur in wässriger Lösung.

Hinweis: Die Viskosität von Wasser bei Raumtemperatur ist $0,001$ Pa·s.

(b) Wie weit (im Sinne der Wurzel aus der mittleren quadratischen Distanz, "RMSD") diffundieren das Molekül, das Protein und das Bakterium in 1D in 1 s, 1 h, einem Tag?

(c) Warum haben große Lebewesen (z.B. Menschen) eine Blutzirkulation nötig, Bakterien aber nicht?

Aufgabe 7 – Gravitation vs. Elektrisches Feld

(a) Ein Elektron wird durch die Coulombkraft eines über ihm befindlichen, ortsfesten Protons gegen das Gravitationsfeld der Erde in der Schwebe gehalten. Unter der völlig unrealistischen Annahme, dass keine anderen geladenen Teilchen in der Nähe sind: wie groß ist der Abstand zwischen Elektron und Proton?

(b) Zwei Protonen befinden sich 10 m von einander entfernt. Berechnen Sie das Verhältnis von Gravitationskraft und elektrischer Kraft, die beide aufeinander ausüben. Welche Kraft ist stärker?

(c) Wie schwer müsste jeweils ein Proton sein, damit es sich bei gleichbleibender Ladung mit einem anderen (gleichartigen) Proton bei 10 m Abstand in einem Kräftegleichgewicht zwischen elektrischer Abstoßung und gravitativer Anziehung befände?

Aufgabe 8 – Rotationsfreiheit des elektrischen Feldes

Zeigen Sie, warum das Integral

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dr} = 0$$

aus der Beziehung $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ folgt. Dabei bezeichnet $\vec{E}$ das elektrische Feld und φ sein elektrostatisches Potential. Was bedeutet das? Warum gilt diese Aussage nur im elektrostatischen Fall?

Hinweise: Sie werden folgende Identitäten brauchen:

- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = 0$ (Diese Identität wurde mehrfach in T0 bewiesen.)
- $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\varphi(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\varphi(x, y)$ (Satz von Schwarz)

Aufgabe 9 – Feld innerhalb eines halbkreisförmigen Drahtes

Eine Ladung Q ist gleichmäßig verteilt über einen genügend dünnen ringförmigen Draht mit halbkreisförmiger Form (Radius a und Länge πa). Der Drahtring liegt in der x-y-Ebene, sein Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Welche elektrische Feldstärke herrscht im Mittelpunkt des Halbkreises, also am Koordinatenursprung?

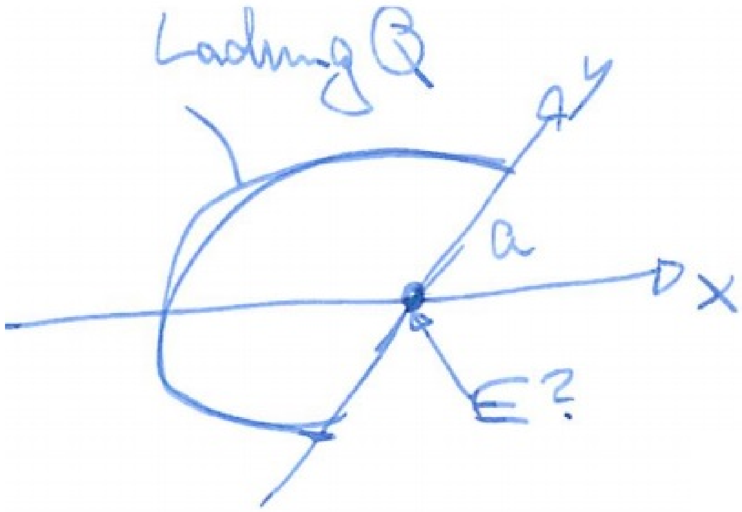

Abbildung 4: Skizze des halbkreisförmigen Drahtes

Aufgabe 10 – Feld einer geladenen Kugel

Diese Aufgabe bringt bis zu 4 Punkte

(a) Leiten Sie aus dem Gaußschen Satz das elektrische Feld einer im inneren homogen geladenen Kugel (unbewegliche Ladungsträger) mit konstanter Ladungsdichte ρ_0 und Radius a ab. Betrachten Sie die Fälle $r < a$ und $r \geq a$ gesondert und skizzieren Sie $E(r)$.

(b) Wie groß ist die Ladungsdichte und das elektrische Feld auf der Oberfläche der Kugel für den Fall, dass Elementarladungen in der Kugel mit einer Gitterkonstante von 0.5 nm in einem kubischen Gitter angeordnet sind und die Kugel einen Radius von $a = 1\ \mu m$ hat?

(c) Vergleichen Sie das Feld für $r > a$ mit dem eines Coulombfeldes einer Punktladung.

(d) Hätte man das elektrische Feld nicht einfacher aus der Poissongleichung $\Delta\varphi = -\rho/\epsilon_0$ erhalten? Rechnen Sie am besten in Kugelkoordinaten, in denen für die radiale Abhängigkeit gilt:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\varphi$$

(e) Nehmen Sie nun an, dass die Elementarladungen in der Kugel jetzt doch beweglich sind und an die Oberfläche der Kugel getrieben werden. In der Kugel findet sich also keine Ladung mehr, stattdessen ist die gesamte Ladung der Kugel auf der äußersten Kugeloberfläche. Wiederholen sie die Berechnung des elektrischen Feldes für die Fälle $r < a$ und $r \geq a$. Was ändert sich?