Übungsblatt Elektrodynamik 2 - Musterlösung
Besprechung in der Woche vom 04.06.18 bis 08.06.18

Teil A: Verständnisaufgaben

Aufgabe 1 – Kapazität einer Kugel

Was ist die Kapazität einer (isolierten) Kugel aus einem leitenden Material mit einem Radius R? Hinweis: Erinnern Sie sich an die Definition der Kapazität.

Lösung: Die Kapazität ist definiert als:

$$C = \frac{Q}{U}, \tag{1}$$

wobei U das Potential (die „Spannung") ist. Daraus folgt für die Kapazität einer leitenden Vollkugel:

$$U_{VK} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{Q}{U_{VK}} = 4\pi\varepsilon_0 R. \tag{2}$$

Aufgabe 2 – Raumladungsdichte der Atmosphäre

In einem bestimmten Gebiet der Erdatmosphäre wurde das elektrische Feld oberhalb der Erdoberfläche mit folgenden Ergebnissen gemessen: 150 N/C in einer Höhe von 250 m und 170 N/C in 400 m Höhe. In beiden Fällen ist das elektrische Feld nach unten zur Erde gerichtet. Berechnen Sie die Raumladungsdichte der Atmosphäre zwischen 250 und 400 m unter der Annahme, dass sie in diesem Bereich homogen ist. (Die Erdkrümmung kann vernachlässigt werden. Warum?)

Lösung: Wir betrachten zunächst, wie sich das elektrische Feld E mit der Höhe h ändert, denn nach der ersten Maxwell-Gleichung wissen wir, dass:

$$\frac{\partial E}{\partial h}\varepsilon_0 = \rho.$$

Somit müssen wir nur die Änderung des elektrisches Feldes E mit der Höhe bestimmen und können direkt auf die Ladungsdichte schließen. Nach der Angabe gilt:

$$\frac{\partial E}{\partial h} = \frac{20\ \text{N/C}}{150\ \text{m}},$$

und somit für die Ladungsdichte:

$$\rho = 8.854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{As}}{\text{V m}} \cdot \frac{20\ \text{V/m}}{150\ \text{m}} = 1.1805 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^3}.$$

Aufgabe 3 – Gravitationsabschirmung

Wie kommt es, dass man elektrische Felder abschirmen, also aus einem bestimmen Volumen fernhalten kann, Gravitationsfelder aber nicht? Wie müssen Schirme gegen elektrische Felder und wie müssten Gravitationsschirme beschaffen sein? Stellen Sie sich die Möglichkeiten vor, die ein Gravitationsschirm bieten würde!

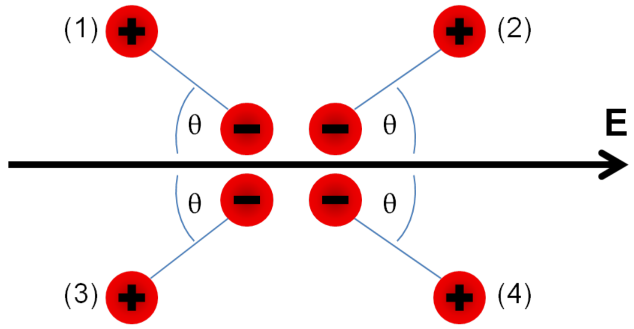
Lösung: Elektrische Felder lassen sich aufgrund der Existenz zweier gegensätzlicher Ladungsvorzeichen abschirmen. Negative Ladungen "schlucken" die Feldlinien, die die positiven Ladungen aussenden. Für die Gravitation gibt es, trotz einiger spekulativer Ansätze, keine negativen Massen, die als Gegenpol auftreten. Feldlinien, die von positiven Massen ausgehen, laufen grundsätzlich bis ins Unendliche.
Zwar wird der Begriff der "negativen Masse" heuristisch verwendet, z.B. um die von einem Schiff verdrängte Wassermenge zu beschreiben und damit die Kräfte zu diskutieren, die auf das Gesamtsystem wirken. Vom Standpunkt der Felderzeugung führt dieser Trick jedoch in die Irre.
Ein Gravitationsschirm wäre nur mit Hilfe von tatsächlich existierenden negativen Massen realisierbar. Ein Gravitationsschirm böte auf den ersten Blick erstaunliche Möglichkeiten: Man könnte dahinter einen Körper kräftefrei heben und dann, nachdem man den Schirm entfernt hat, wieder sinken und Arbeit leisten lassen.
Der Vergleich mit dem elektrischen Fall, wo das Entsprechende durchaus möglich ist, zeigt aber, dass sich der Energiesatz auch so nicht betrügen lässt. Zum Verschieben des Schirms braucht man nämlich ebenfalls Energie. Denn die entgegengesetzten Ladungen (bzw. Massen) müssen voneinander entfernt werden (der felderfüllte Raum muss vergrößert werden). Das kostet Energie, und zwar mindestens so viel, wie gewonnen würde.

Aufgabe 4 – Dipol im E-Feld

Die Abbildung zeigt vier verschiedene Orientierungen eines Dipols in einem äußeren elektrischen Feld. Ordnen Sie die vier Fälle nach

a) dem Betrag des auf den Dipol wirkenden Drehmoments.

b) dem Betrag der potenziellen Energie des Dipols.



Lösung: a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass das Drehmoment auf einen Dipol gegeben ist durch $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = q\vec{d} \times \vec{E}$ bzw. $M = q|\vec{d}||\vec{E}|\sin\alpha$, wobei α der Winkel zwischen $\vec{E}$ und $\vec{d}$ ist und $\vec{d}$ vom negativen zum positiven Pol zeigt. Folglich ist der Betrag des wirkenden Drehmoments für alle gleich:

$$\begin{aligned}
(1) M &= qdE\sin(\pi - \theta) = qdE\sin(\theta) \\
(2) M &= qdE\sin(\theta) \\
(3) M &= qdE\sin(\pi - \theta) = qdE\sin(\theta) \\
(4) M &= qdE\sin(\theta)
\end{aligned}$$

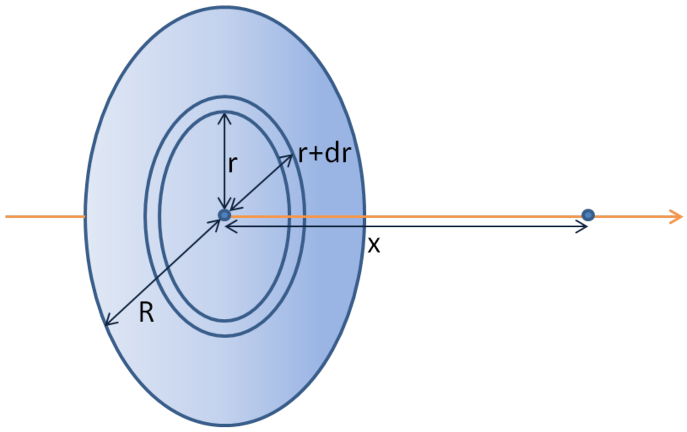
b) Aus der Vorlesung wissen wir ebenfalls, dass für den Dipol $E_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -|\vec{p}||\vec{E}|\cos\alpha$ gilt. Analoges Vorgehen wie bei der a) ergibt

$$\begin{aligned}
(1) E_{pot} &= -pE\cos(\pi - \theta) = pE\cos\theta \\
(2) E_{pot} &= -pE\cos(\theta) \\
(3) E_{pot} &= -pE\cos(\pi - \theta) = pE\cos\theta \\
(4) E_{pot} &= -pE\cos(\theta).
\end{aligned}$$

D.h. dass jeweils (2), (4) und (1), (3) gleichauf sind, wobei (2),(4) weniger potentielle Energie haben als (1),(3).
Anmerkung: Wenn man hier geschrieben hat, dass alle gleich auf sind, gibt es trotzdem die volle Punktzahl, da die Ausdrucksweise der Aufgabenstellung auch als ordnen von $|E_{pot}|$ verstanden werden kann.

Aufgabe 5 – Elektrostatik II

Eine flache Scheibe vom Radius R trägt eine homogen verteilte Ladung Q. Bestimmen Sie das elektrische Potential in einem Punkt P der im Abstand x vom Mittelpunkt auf der Symmetrieachse der Scheibe liegt, siehe Abbildung. Gehen Sie hierbei analog zur Aufgabe 5 im Übungsblatt Elektrodynamik 1 vor.



Lösung: Wir zerlegen die Scheibe in Ringe mit dem (inneren) Radius r und der infinitesimalen Breite dr. Die Ladung ist homogen verteilt und damit ist die Ladung eines Ringes proportional zu seiner Fläche. Der Flächeninhalt der gesamten Scheibe ist πR^2, der jedes schmalen Ringes:

$$dA = 2\pi r \cdot \mathrm{d}r. \tag{3}$$

Damit ist die Ladung in den Ringen gegeben durch:

$$\frac{\mathrm{d}q}{Q} = \frac{2\pi r \cdot dr}{\pi R^2}. \tag{4}$$

Nach der Ladung des Ringes aufgelöst ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\mathrm{d}q = \frac{2Qr}{R^2}\mathrm{d}r. \tag{5}$$

Wenn wir nun die gesamte geometrische Konstruktion betrachten, sehen wir, dass der Radius a vom Punkt P zu dem jeweiligen Ring sich nach Satz des Pythagoras wie folgt berechnet:

$$a = \left(x^2 + r^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Wollen wir nun das Potential im Punkt P bestimmen, benutzen wir, wie in Aufgabe 5 des vorherigen Blattes, das Superpositionsprinzip für ein Kontinuum von Punktladungen:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\mathrm{d}q}{a} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon R^2}\int_0^R \frac{r\mathrm{d}r}{\left(x^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon R^2}\left(x^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{r=0}^{r=R}.$$

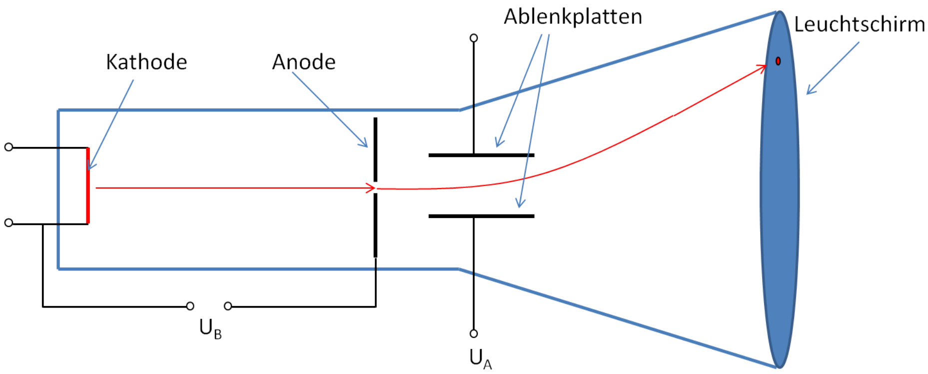
Somit ergibt sich:

$$\phi = \frac{Q}{2\pi\varepsilon R^2}\left[\left(x^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}} - x\right]. \tag{7}$$

Teil B: Rechenaufgaben

Aufgabe 6 – Unser alter Röhrenfernseher

Früher als es noch keine Plasma- und LC-Bildschirme gab, wurde unter dem Begriff ,,Fernsehgerät" grundsätzlich ein sogenanntes Röhrengerät verstanden. Diese ist ihrer Konstruktion nach eine Kathodenstrahlröhre. Sie besteht aus einem unter Vakuum stehenden, trichterförmigen Glasbehälter, in dem je nach der gewünschten Helligkeit eines Bildpunktes mehr oder weniger Elektronen von der Kathode im hinten liegenden Bildröhrenhals nach vorn zur Anode (dem eigentlichen Bildschirm) hin durch eine Potentialdifferenz U_B beschleunigt werden. Anschließend werden sie durch Kondensatorplatten abgelenkt um die fluoreszierende Leuchtschicht an einen bestimmten Punkt im Leuchtschirm anzuregen um so nicht permanente Bilder zu produzieren, siehe Abbildung.



a) Welche Geschwindigkeit hat ein ursprünglich an der Kathode ruhendes Elektron wenn es die Anode erreicht für $U_B = 1250\,\mathrm{V}$?

Lösung: Die anfängliche potentielle Energie des Elektrons im homogenen elektrischen Feld des Kondensators wird wenn sich das Elektron an der Anode befindet vollständig in kinetische Energie Umgewandelt worden sein. Dies ist nichts anderes als Energieerhaltung:

$$
\begin{aligned}
E_{pot}^{Kathode} &= E_{kin}^{Anode} \\
\Longrightarrow Uq &= \frac{mv_x^2}{2} \\
\Longrightarrow v_x &= \sqrt{\frac{2\,Uq}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1250\ \mathrm{V} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}}{9,1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 2,1 \cdot 10^7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0,070c,
\end{aligned}
$$

wobei wir das Koordinatensystem so gelegt haben, dass das Elektron sich in x-Richtung bewegt. Da die Geschwindigkeit $< 10\ \%$ der Lichtgeschwindigkeit, können wir in guter Näherung relativistische Effekte ignorieren.

---

b) Im Bereich zwischen den Ablenkplatten herrscht ein elektrisches Feld von $E = 2 \cdot 10^4\,\mathrm{N/C}$, wobei die obere Platte positiv und die untere Platte negativ geladen sind. Wie lange braucht das Elektron zum Durchlaufen des Kondensators? Nehmen Sie an, dass dieser quadratisch ist mit Kantenlänge 4 cm.

Lösung: Im elektrischen Feld der Kondensatorplatten wirkt auf das Elektron lediglich eine Kraft in y-Richtung, d.h. dass sich die Geschwindigkeit in x-Richtung nicht ändert. Folglich,

$$t_d = \frac{d}{v_x} = \frac{4 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{2,1 \cdot 10^7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,9\ \text{ns}.$$

---

c) Wie weit ist das Elektron von der Achse entfernt, wenn es den Bereich zwischen den Platten durchflogen hat? In welcher Entfernung von der Achse trifft das Elektron auf den Schirm, wenn dieser 12 cm von den Kondensatorplatten entfernt ist?

Lösung: Wir berechnen zunächst die Abweichung am Ende der Ablenkplatten, durch den Newtonansatz, wobei die wirkende Kraft $F = Eq = const.$ ist:

$$\ddot{y}(t) = \frac{Eq}{m} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{Eqt^2}{2m}.$$

Am Ende der Kondensatorplatten gilt folglich

$$y(t_d) = \frac{Eqt_d^2}{2m} = \frac{Eqd^2}{2mv_x^2} = \frac{Ed^2}{4U} = \frac{2 \cdot 10^4\ \text{N/C} \cdot (4 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2}{4 \cdot 1250\ \text{V}} = 6,4\ \text{mm}.$$

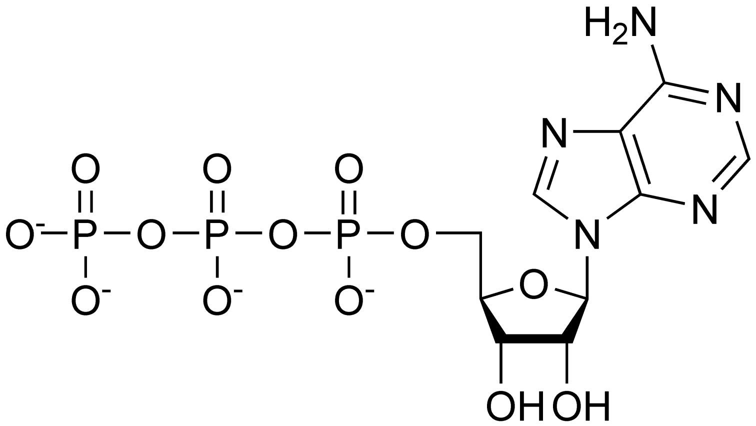
Nach den Ablenkplatten herrscht kein Feld mehr, sodass

$$\begin{aligned} y(t_s) &= v_y(t_d)t_s + y(t_d) \\ &= \frac{Eqt_d t_s}{m} + y(t_d) \\ &= \frac{Eqds}{mv_x^2} + y(t_d) \\ &= \frac{Eds}{2U} + y(t_d) = 4,5\ \text{cm}, \end{aligned}$$

wobei s den Abstand zwischen Ablenkplatten und Schirm bezeichnet.

Aufgabe 7 – ATP Hydrolyse

Adenosintriphosphat (ATP) ist die ,,Energiewährung" der Zelle. Die Energie ist gespeichert in der räumlichen Anordnung von drei negativ geladenen Phosphatgruppen, siehe Abbildung. Die Energie wird freigesetzt wenn die letzte Phosphatgruppe (auch γ-Phosphat genannt) abgebrochen wird, d.h. wenn ATP zu Adenosindiphosphat *hydrolisiert*.
Sie können eine simple Abschätzung über die in diesem Prozess freigesetzte Energie machen indem Sie die elektrostatische Energie der Phosphatgruppen betrachten. Dazu können Sie die Phosphatgruppen als Punktladungen auf einer Linie mit einem relativen Abstand von 0,3 nm zwischen zwei Phosphaten behandeln, wobei das γ-Phosphat eine Ladung von $-2\,e$ und die anderen beiden Phosphate jeweils eine Ladung von $-1\,e$ haben, und das Coulombsche Gesetz benutzen um die potentielle Energie auszurechnen.



a) Wie groß ist die Energiedifferenz zwischen ATP und ADP wenn Sie annehmen, dass das freigesetzte Phosphat sich unendlich weit weg bewegt und dass diese Reaktion im Vakuum stattfindet?

Lösung: Im Allgemeinen ist das Coulombpotential zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 mit Abstand r im Medium gegeben durch

$$V_\mathrm{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}} \frac{q_1 q_2}{r},$$

mit der materialabhängigen relativen Permittivität ε_r und der elektrischen Feldkonstante ε_0.
Wir sollen die Energiedifferenz von ATP und ADP berechnen:

$$\Delta E = E_\mathrm{ATP} - E_\mathrm{ADP}.$$

Für ATP haben wir das Potential der drei Ladungen im gegenseitigen Feld:

$$E_\mathrm{ATP} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}} \left(\frac{e^2}{r_{\alpha\beta}} + \frac{2e^2}{r_{\beta\gamma}} + \frac{2e^2}{r_{\alpha\gamma}} \right).$$

Für ADP haben wir nur das Potential zwischen dem α-Phosphat und dem β-Phosphat, weil das γ-Phosphat unendlich weit weg ist:

$$E_\mathrm{ADP} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}} \frac{e^2}{r_{\alpha\beta}}.$$

Der Energieunterschied ist also

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\left(\frac{2e^2}{r_{\beta\gamma}} + \frac{2e^2}{r_{\alpha\gamma}}\right).$$

Im Vakuum gilt $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$ und wir lesen aus der Angabe $r_{\beta\gamma} = 0,3\,\mathrm{nm}$ und $r_{\alpha\gamma} = 0,6\,\mathrm{nm}$, sodass

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{4\cdot\pi\cdot 8,854188\cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\ m}^2}}\left(\frac{2\cdot(1,6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{0,3\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} + \frac{2\cdot(1,6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{0,6\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}\right)\\ &= 2,3\cdot 10^{-18}\ \mathrm{Nm}\\ &\cong 560\ k_\mathrm{B}\,T.\end{aligned}$$

---

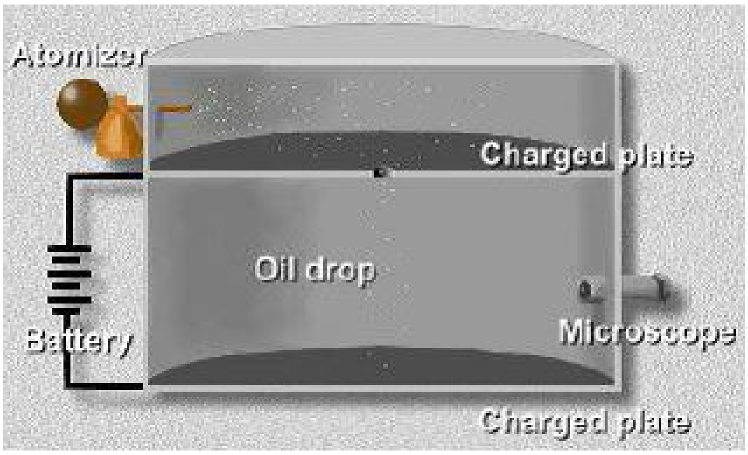
b) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die Reaktion in Wasser stattfindet?

Lösung: Wir wiederholen die Rechnung mit $\varepsilon_\mathrm{r} = 80$ für Wasser und erhalten

$$\Delta E_\mathrm{Wasser} = \frac{\Delta E}{80} = 2,9\cdot 10^{-20}\ \mathrm{Nm} = 7\ k_B\,T.$$

Aufgabe 8 – Milikan-Versuch

Der Millikan-Versuch ermöglichte es bereits 1910, die Größe der Elementarladung e relativ genau zu ermitteln. Durch Zerstäuben von Öl werden kleinste Öltröpfchen erzeugt. Diese diffundieren durch ein Loch in der oberen Platte in einen Plattenkondensator hinein, dessen zwei horizontale Platten einen Abstand von $d = 8$ mm haben. Beim Zerstäuben werden die Tröpfchen aufgrund von Reibung aufgeladen. Mithilfe einer von außen angelegten Spannung U wird ein konstantes Feld $E = \frac{U}{d}$ im Kondensator eingestellt.



a) Im feldfreien Zustand ($U = 0\,\mathrm{V}$) sinkt ein kugelförmiges Tröpfchen mit dem Radius R mit konstanter Geschwindigkeit v nach unten, sobald nach einer vernachlässigbaren Beschleunigungsphase die Gewichtskraft durch die Auftriebskraft (aufgrund der Verdrängung von Luft) und durch die Reibungskraft (Stokessches Gesetz) kompensiert wird. Die Sinkgeschwindigkeit des Tröpfchens sei $v = 10^{-4}$ m/s. Berechnen Sie mithilfe der Viskosität $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ kg/(m s), der Dichte der Luft $\rho_{\text{Luft}} = 1,2\,\text{kg/m}^3$, sowie der Dichte des Öls $\rho_{\text{Öl}} = 0,91\,\text{g/cm}^3$ den Radius R und die Masse m des Tröpfchens.

Lösung: Die beteiligten Kräfte sind:

$$F_G = m_{\text{Öl}} g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{Öl}} g$$
$$F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{Luft}\, g$$
$$F_R = 6\pi\eta R v$$

Wir stellen das Kräftegleichgewicht auf,

$$F_G = F_A + F_R \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6\pi\eta R v = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{Luft}) g,$$

und lösen letztlich nach R auf:

$$R = \sqrt{\frac{9v\eta}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{Luft})g}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1.8 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{kg}}{\text{m·s}}}{2(0.91 \cdot 10^3 - 1.2)\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 9.5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}.$$

Damit lässt sich nun auch die Masse berechnen:

$$m_{\text{Öl}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{Öl}} = 3,3 \cdot 10^{-12}\ \text{g}$$

---

b) Nehmen Sie an, das Tröpfchen trage eine Elementarladung. Welches Feld muss im Kondensator herrschen, damit das Tröpfchen in Ruhe bleibt? Welche Spannung U muss dazu angelegt werden?

Lösung: Das Kräftegleichgewicht lautet nun

$$F_G = F_A + F_R + F_E.$$

Im Schwebezustand gilt $F_R = 0$ und somit

$$F_E = F_G - F_A = V_{\text{Öl}}(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{Luft})g = \frac{4}{3}R^3\pi(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{Luft})g.$$

Als nächstes benutzen wir

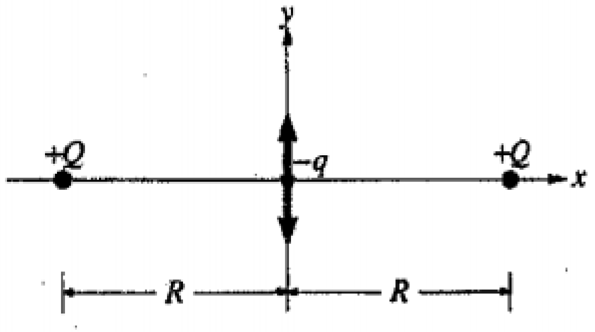
$$E = \frac{F_E}{q}, \qquad E = \frac{U}{d}.$$

In unserem Fall ist q ist die Elementarladung e, sodass

$$\begin{aligned} U = Ed &= \frac{F_E}{e}d = \frac{\frac{4}{3}R^3\pi(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{Luft})g}{e}d \\ &= \frac{\frac{4}{3}\pi(9.53 \cdot 10^{-7}\ \text{m})^3(0.91 \cdot 10^3 - 1.2)\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} \cdot 0.008\ \text{m} \\ &= 1.6 \cdot 10^3\ \text{V} = 1.6\ \text{kV} \\ E &= \frac{F_E}{e} = 2 \cdot 10^5\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Aufgabe 9 – Oszillierende Ladung

Betrachte zwei fixierte Punktladungen mit jeweiliger Ladung Q im Abstand von 2R auf der x-Achse. Ein kleines Teilchen der Masse m und Ladung -q wird exakt zwischen die beiden festen Teilchen gelegt. Eine kleine Auslenkung in y-Richtung führt zu einer Oszillation dieses Teilchens entlang der y-Achse. Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω dieser Schwingung.



Lösung: Für diese Aufgabe verwenden wir das Superpositionsprinzip und den aus E1 bekannten Newton'schen Ansatz. Es gilt:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F},$$

wobei die wirkende Kraft die Coulombkraft ist. Wir bezeichnen zur besseren Übersicht die fixierten Punktladungen Q mit den Indizes 1 und 2, und das kleine, massebehaftete und geladene Teilchen q mit dem Index 3. Damit ergibt sich für die Coulombkraft:

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1 q_3}{(r_{13})^3}\vec{r}_{13} + \frac{Q_2 q_3}{(r_{23})^3}\vec{r}_{23}\right).$$

Nun verwenden wir, dass $Q_1 = Q_2 \equiv Q$ ist, und führen unser in der Aufgabenstellung definiertes Koordinatensystem ein:

$$\vec{\mathrm{r}}_{13} = \begin{pmatrix} R \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_{23} = \begin{pmatrix} -R \\ y \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in unsere Differentialgleichung erhalten wir ergo:

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{(R^2+y^2)^{3/2}}\left[\begin{pmatrix} R \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \\ y \end{pmatrix}\right].$$

Wie zu erwarten erhalten wir aus Symmetriegründen, dass die Beschleunigung/wirkende Kraft auf das kleine Teilchen in x-Richtung 0 ergibt. Wir betrachten nun die Kraft in y-Richtung:

$$\ddot{y} = -\frac{1}{2m\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{(R^2+y^2)^{3/2}}\,y.$$

Nun verwenden wir die Annahme, dass R $\gg y$ und erhalten:

$$\ddot{y} = -\frac{1}{2m\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^3}y.$$

Erinnern wir uns nun an die harmonischen Oszillationen aus E1, so erkennen wir, dass:

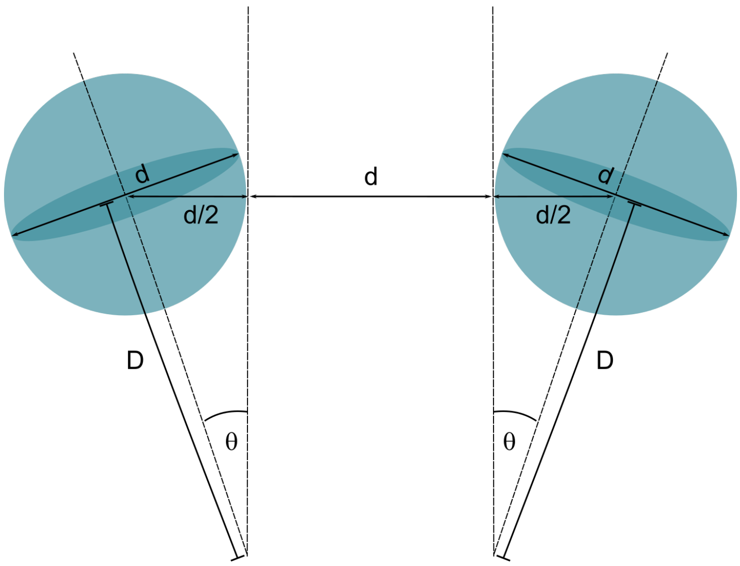
$$\ddot{y} = -\omega^2 y \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{2m\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^3}}.$$

Aufgabe 10 – Helium Ballons

In der Vorlesung hatten wir zwei metallbeschichtete Helium-Ballons aufgeladen und so Abstoßung und Anziehung im Coulomb-Gesetzt demonstriert, siehe Bild.

a) Schätzen Sie die Ladung Q auf der Oberfläche der Ballons ab. Sie können die Ballons als Kugeln nähern und die Masse der Fäden und Ballonhüllen vernachlässigen. Treffen Sie realistische Annahmen zur Geometrie. Die Dichten von Luft und Helium betragen 1,2 kg/m^3 und 0,18 kg/m^3, respektive.

Lösung:



Für die Geometrie nehmen wir folgendes an: $D \approx 1$ m, $d \approx 0.3$ m. Um die Ladung abzuschätzen muss zunächst ein Kräftegleichgewicht betrachtet werden. Die Gesamtkraft, die auf die Ballons wirkt, setzt sich aus der Auftriebs- und der Coulombkraft zusammen. Es gilt:

$$\begin{aligned} F_{Auftrieb} &= \cos(\theta) \cdot F_{ges}, \\ F_{Coulomb} &= \sin(\theta) \cdot F_{ges}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für θ:

$$\tan(\theta) = \frac{F_{Coulomb}}{F_{Auftrieb}}.$$

Mit

$$\begin{aligned} F_{Auftrieb} &= V(\rho_L - \rho_{He})g = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 (\rho_L - \rho_{He})g, \\ F_{Coulomb} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2d)^2}, \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} &\tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{d}{2D}\right)\right) \cdot \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 (\rho_L - \rho_{He})\, g = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2d)^3} \\ \Longleftrightarrow q &= \sqrt{4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot (2d)^2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 (\rho_L - \rho_{He})\, g \cdot \tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{d}{2D}\right)\right)} \\ &= 9.3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} \approx 1\ \mu\mathrm{C}. \end{aligned}$$

Ein Check der Einheiten ist Konsistent:

$$[q] = \left(\frac{\mathrm{C}^2 \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^{1/2} = \mathrm{C}.$$

Da wir hier das Gewicht des Ballons vernachlässigen, ist die tatsächliche Ladung vermutlich geringer (da $F_{Auftrieb}$ geringer ist).

---

b) Was ist die Kapazität eines solchen Heliumballons? Welche Spannung muss man daher anlegen, um die im ersten Teil ausgerechnete Ladung Q auf den Ballon zu bringen? *Hinweis: Das Ergebnis aus Aufgabe 1 könnte hilfreich sein.*

Lösung: Die Kapazität einer geladenen Kugel ist (für $\phi = 0$ im Unendlichen):

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R = 1,66 \cdot 10^{-11}\ F.$$

Die Spannung lässt sich wie folgt berechnen:

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d/2} = 5,6 \cdot 10^4\ \mathrm{V} = 56\ \mathrm{kv}.$$

In der Vorlesung wurden 25 kV verwendet. Das heißt, dass unsere Abschätzung in der richtigen Größenordnung liegt.
