

## **11. Vorlesung EP**

I Mechanik

### **7. Schwingungen**

**Wiederholung: Resonanz**

### **8. Wellen**

**(transversale und longitudinale Wellen,  
Phasengeschwindigkeit,  
Dopplereffekt  
Superposition von Wellen)**

**Versuche:**

**Glas zersingen**

**Wellenkette: laufende und stehende Welle**

**Wellenwanne: ebene Welle, Kugelwelle (Huygens)**

**Dopplereffekt akustisch**

**Hörbereich für Schall**

## 7. Schwingungen

Wiederholung: Resonanz

Eine äußere, sich periodisch mit der Kreisfrequenz  $\omega$  ändernde Kraft wirkt auf das schwingende System ein. Es kommt zu einer erzwungenen Schwingung. Nach der Einschwingzeit gilt für die Auslenkung

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

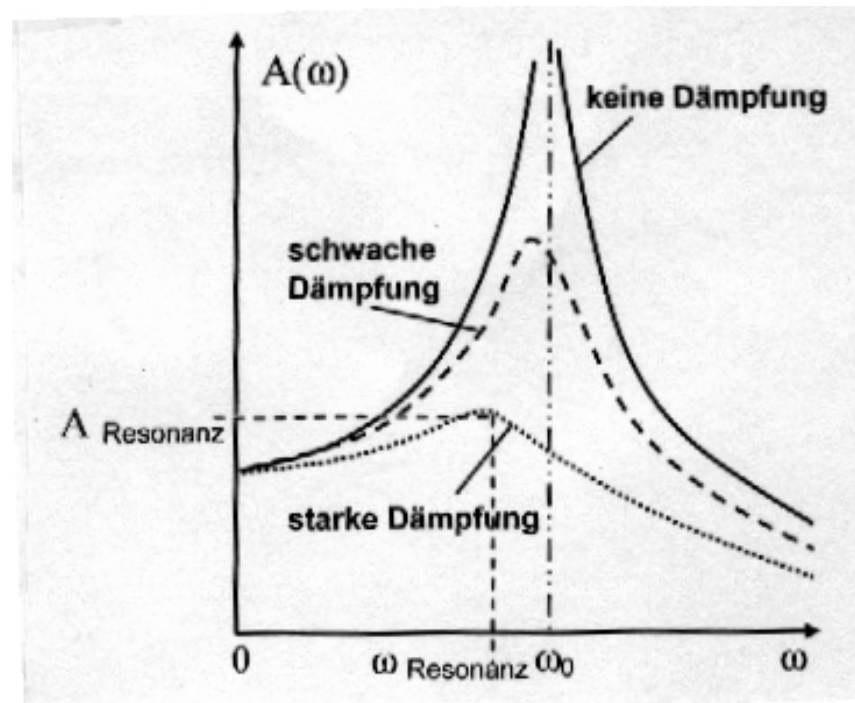
wobei die Maximalamplitude  $A$  und die Phasenverschiebung (zwischen der äußeren Kraft  $F(t) = F_0 \cdot \cos \omega t$  und  $x(t)$ ) von der Erregerfrequenz  $\omega$  abhängen.

Es sei  $\omega_0$  die Eigenfrequenz des frei schwingenden Systems. Die Amplitude  $A$  der erzwungenen Schwingung ist maximal bei der Erregerfrequenz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2},$$

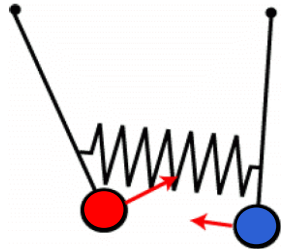
$\omega \approx \omega_0$  bei schwacher Dämpfung ( $\gamma \ll \omega_0$ )

Bei dieser „Resonanzfrequenz“ wird das System genau im richtigen Takt angestoßen und die Schwingung aufgeschaukelt.

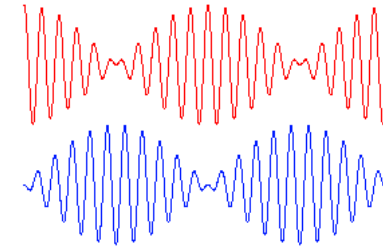


Versuch: Zersingen eines Glases

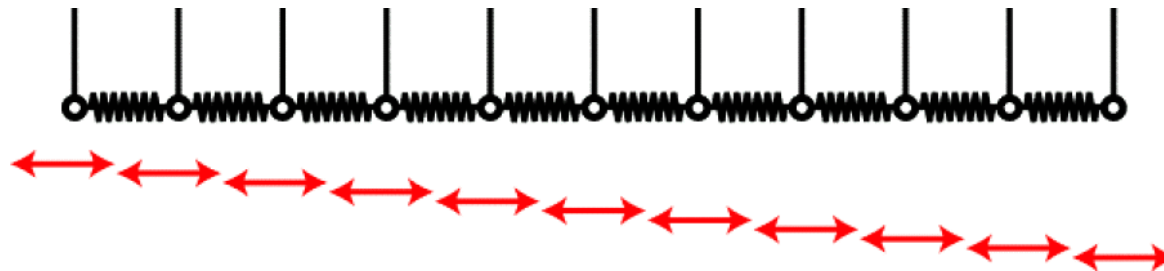
## Ausbreitung von Schwingungen -> Wellen



Bei gekoppelten Pendeln breitet sich die Schwingung von **einem** zum **nächsten** aus



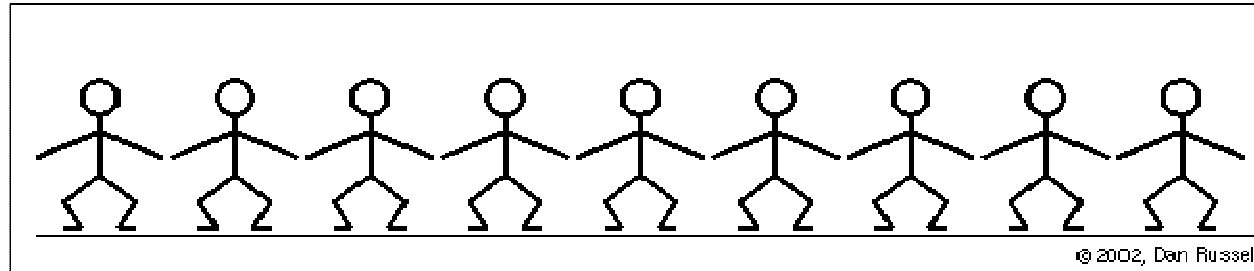
Welle entsteht durch lokale Anregung oder Störung eines Mediums, die sich durch Kopplung auf benachbarte schwingungsfähige Systeme ausbreitet ...



= Modell für Wellen im Medium (Festkörper oder Fluid), wobei die Kopplungsfeder für die intermolekularen Kräfte steht.

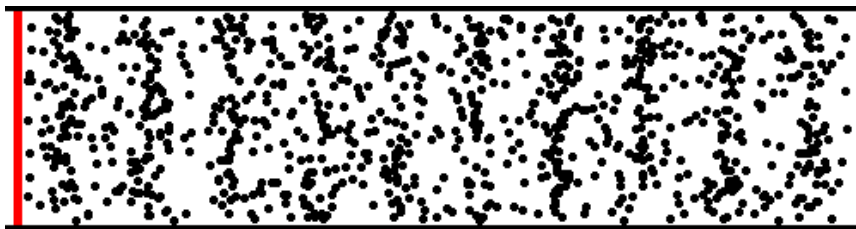
Versuch: Wellenkette (mit Torsionspendel) – Damit die Welle am entfernten Ende nicht reflektiert wird, ist dort zunächst eine Dämpfung eingeschaltet, die später (→stehende Welle) ausgeschaltet wird.

***Dabei wird bei klassischer Welle keine Materie aber eine lokale Störung des Mediums und somit Energie transportiert.***

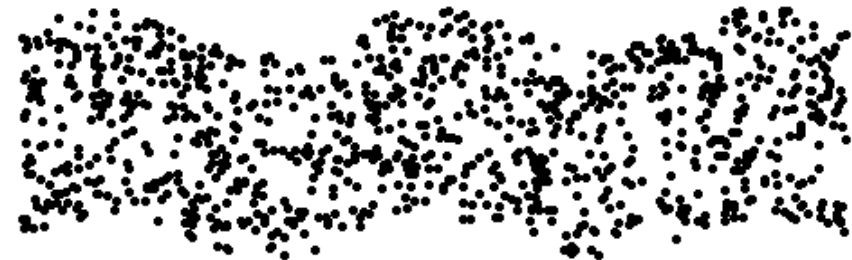


***Das Medium wird lokal verändert, die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt vom Medium (Kopplungsstärke, Trägheit) ab. Die Störung kann pulsförmig oder periodisch (z.B. sinus-förmig) sein.***

**Longitudinale Welle (z.B. Schall):**

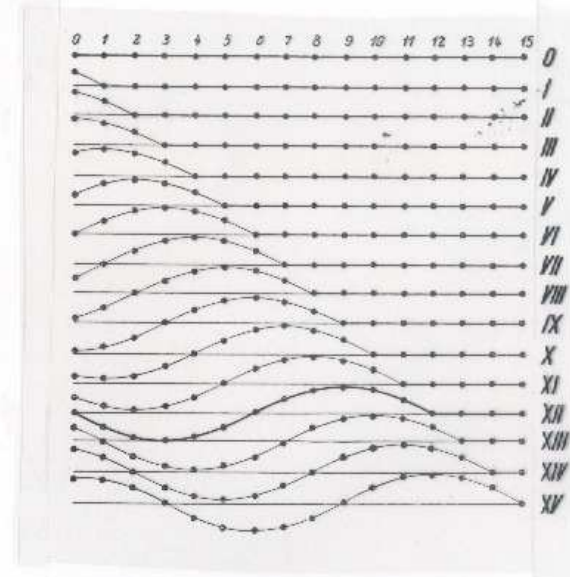
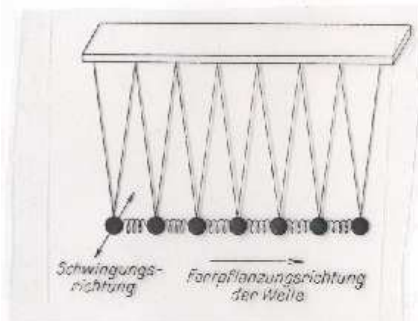


**Transversale Welle  
(Versuch Wellenkette):**



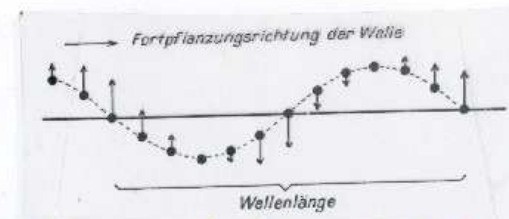
## transversale Welle

Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  
 Die Richtung der Auslenkung ist die Polarisation.



Beispiele:

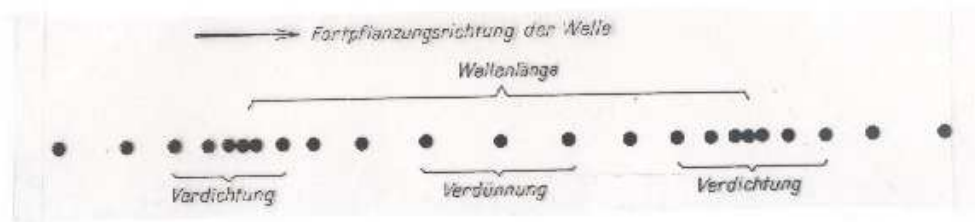
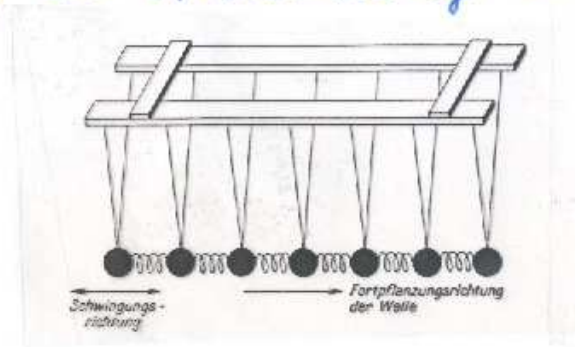
Seilschwingung  
 Saiteninstrumente  
 elektromagnetische Wellen  
 z.B. Licht  
 Infrarot  
 Röntgenstrahlung  
 . . . . .



Schnappschuß in der Polarisationssebene

## Longitudinale Welle

Richtung der Auslenkung = Richtung der Ausbreitung

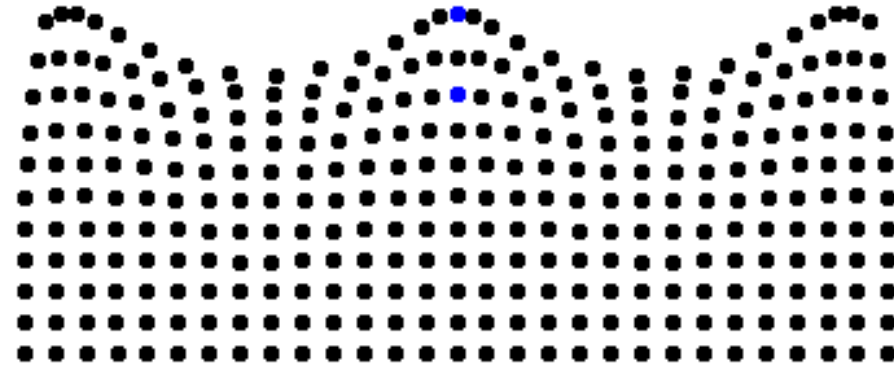


Nicht polarisierbar.  
Es gibt keine  
Polarisationsebene

Beispiele: Schallwellen, allgemein: Drückwellen

## Wasserwellen:

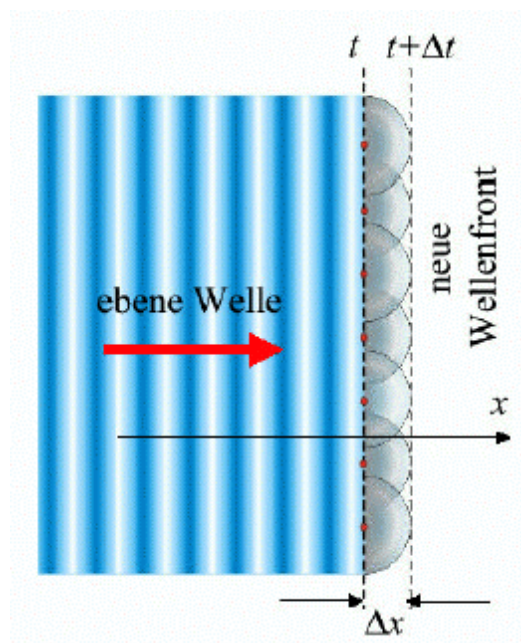
*Kombination beider Typen, Kreisbahnen, deren Radii mit der Tiefe abnehmen.*



©1999, Daniel A. Russell

## Ebene Wellen und Elementarwellen:

## Versuche Wasserwanne

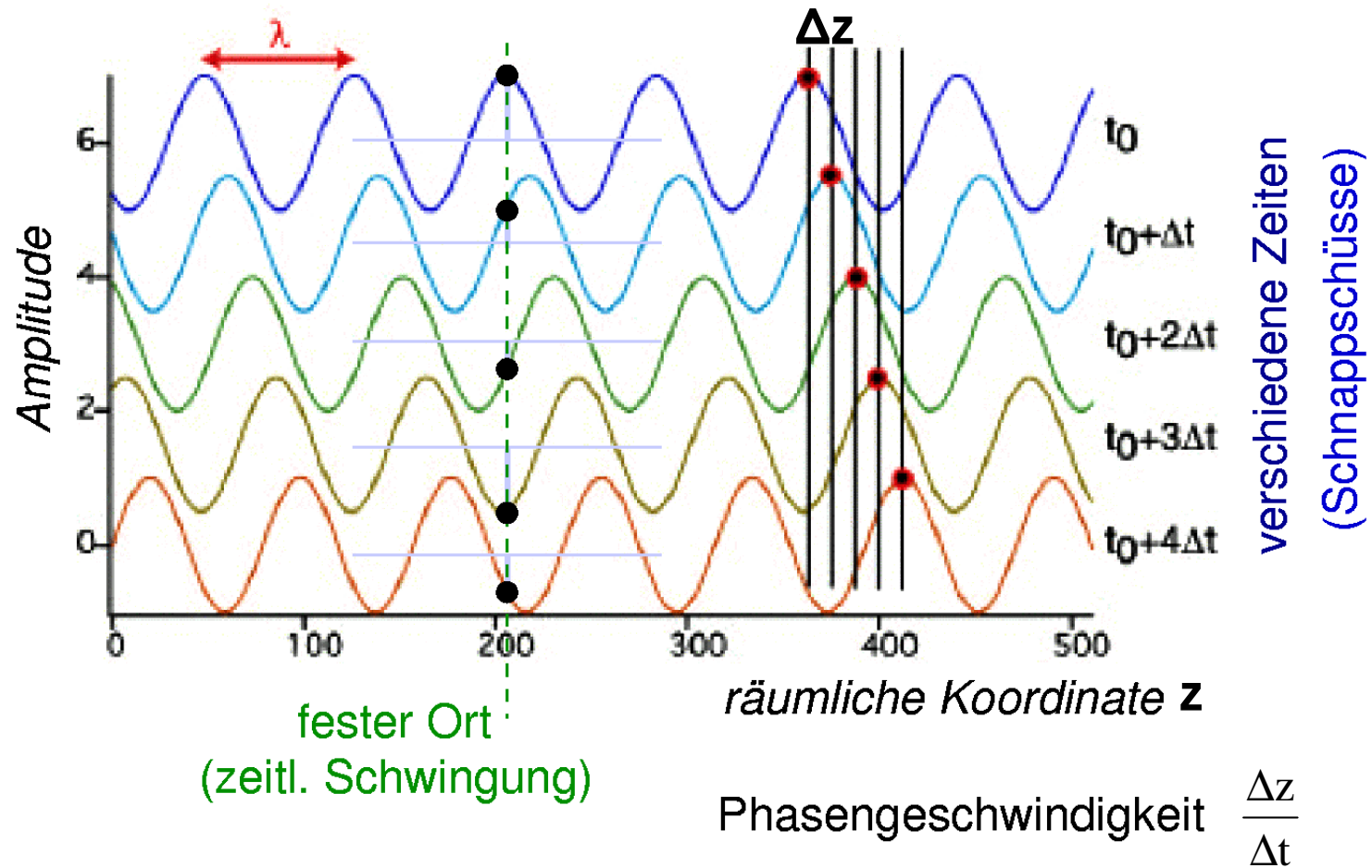


- **Wellenfronten (WF)** = Flächen in 3 (Linien in 2) Dimensionen, deren Punkte gleichphasig schwingen
- **Ausbreitungsrichtung** senkrecht zu **WF**-Flächen
- Bei **ebenen Wellen** sind **WF** Ebenen
- Bei **Elementarwellen** sind **WF** Kugeloberflächen
- **Huygens Prinzip:**
  - 1) Jeder Punkt einer **WF** ist Ausgangspunkt einer Elementarwelle
  - 2) Die Einhüllenden (Tangentenflächen) bilden neue **WF**



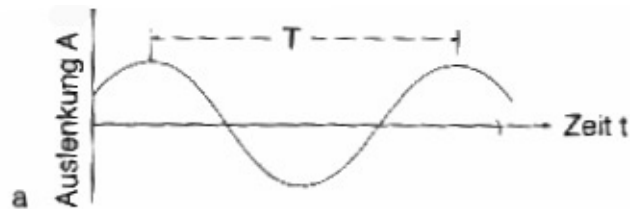
## Wellenausbreitung, mathematische Darstellung

Wellenlänge= während einer Schwingung zurückgelegte Strecke

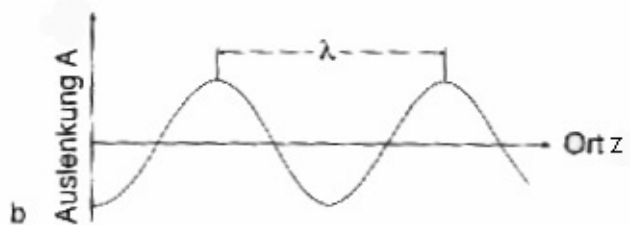


mathematische Darstellung für eine in z-Richtung laufende Welle:

$$A(z,t) = A_0 \sin(\omega t - kz)$$



$z = \text{const.} \rightarrow$  Schwingung



$t = \text{const.} \rightarrow$  Schnappschuss

(a) Zeitabhängigkeit einer Welle an einem festen Ort  $z$ , (b) Ortsabhängigkeit der Welle zu einem festen Zeitpunkt  $t$ . ( $T$ : Schwingungsdauer;  $\lambda$ : Wellenlänge).

**Definition der Wellenlänge  $\lambda$ :** für feste Zeit (Schnappschuß) entspricht  $\lambda$  der Weglänge  $\Delta z$ , für die gilt  $\Delta z \cdot k = 2\pi$ , d.h. das Argument der Sinusfunktion ändert sich um eine Periode.

Wellenzahl (oder Wellenvektor)  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

**Definition der Phasengeschwindigkeit:**

$v_{\text{ph}}$  ist die **Geschwindigkeit von Orten gleicher Amplitude, d.h. gleicher Phase**, wobei die Phase das Argument der Sinus- oder Cosinusfunktion ist: **Phase =  $\omega t - kz$**

Aus Bedingung  $\omega t - kz = \omega \cdot (t + \Delta t) - k \cdot (z + \Delta z)$  folgt

$$\omega \cdot \Delta t = k \cdot \Delta z$$

$$v_{\text{ph}} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{2\pi/\lambda} = f \cdot \lambda$$

**Ausbreitungsgeschwindigkeit (= Phasengeschwindigkeit)  $v_{\text{ph}} = f \cdot \lambda$**

Damit ergibt sich eine alternative Schreibweise für die Wellenamplitude:

$$A(z,t) = A_0 \cdot \sin(\omega(t - z/v_{\text{ph}}))$$

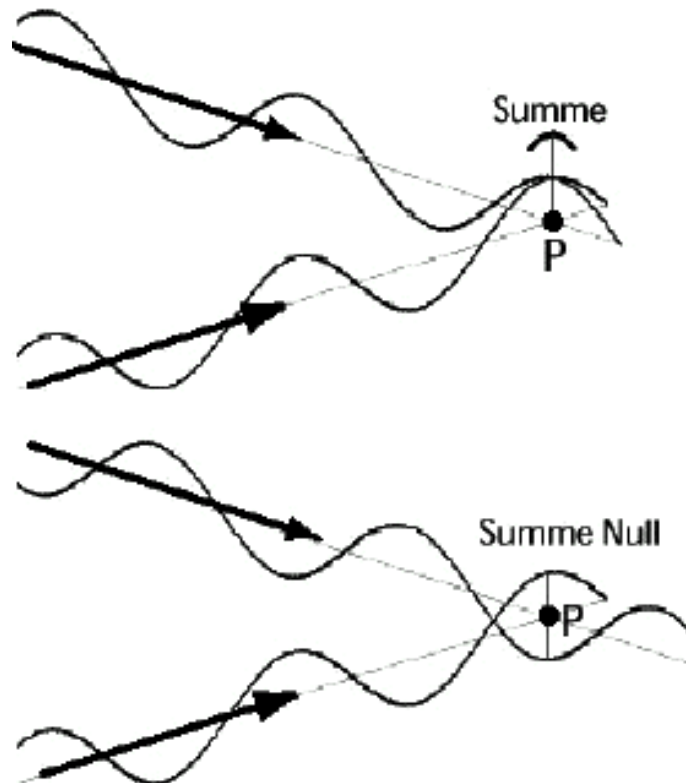
Im Fall der Akustik ist  $v_{\text{ph}}$  die Schallgeschwindigkeit ( $c_{\text{Schall}}$ )

Im Fall der Optik ist  $v_{\text{ph}}$  die Lichtgeschwindigkeit ( $c$ )

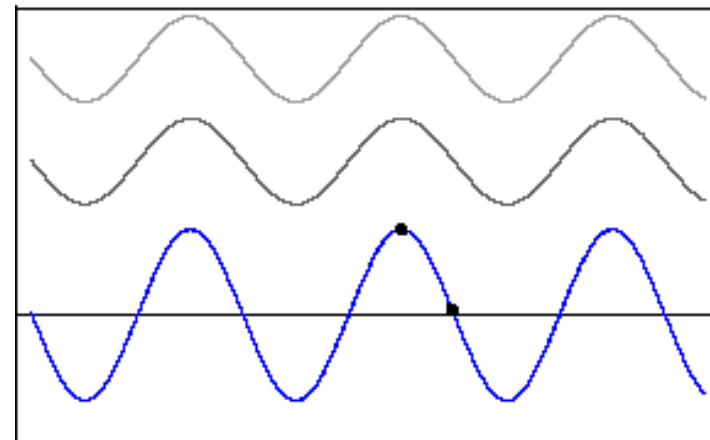
***Achtung: Ändert sich die Geschwindigkeit, so folgt eine Änderung der Wellenlänge, die Frequenz ist immer konstant!***

## Superposition = Überlagerung = Interferenz von Wellen

*Wellen überlagern sich ungestört, d.h. eine Welle läuft weiter, auch wenn es Bereiche mit destruktiver Interferenz (lokaler Auslöschung) gibt.*

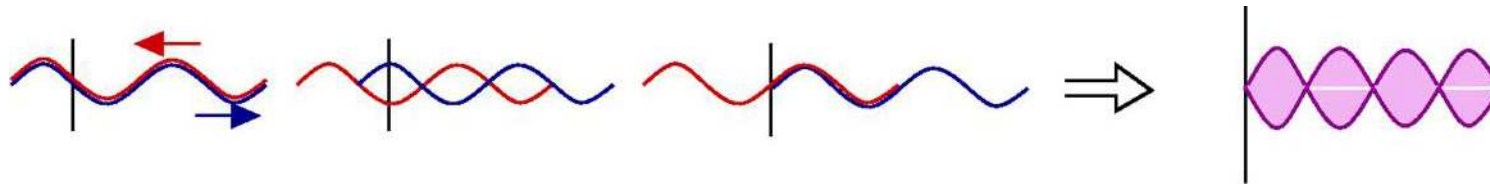


**Zwei ebene Wellen treffen sich.  
Wir betrachten Überlagerung an  
einem Ort P**



## Superposition von Wellen - stehende Wellen

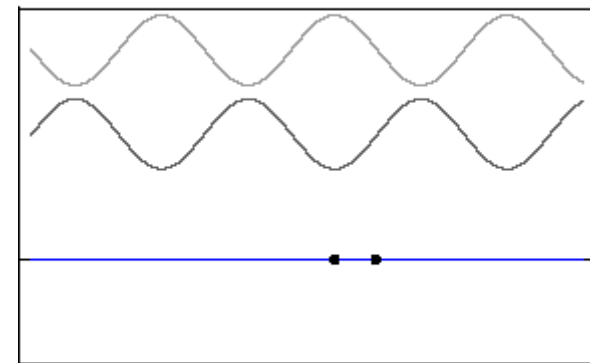
zwei gegenläufige Wellen gleicher Frequenz und Amplitude



$$\begin{aligned}
 A(z,t) &= A_0 \cos(\omega t - kz) + A_0 \cos(\omega t + kz) \\
 &= 2A_0 \cos(kz) \cdot \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$

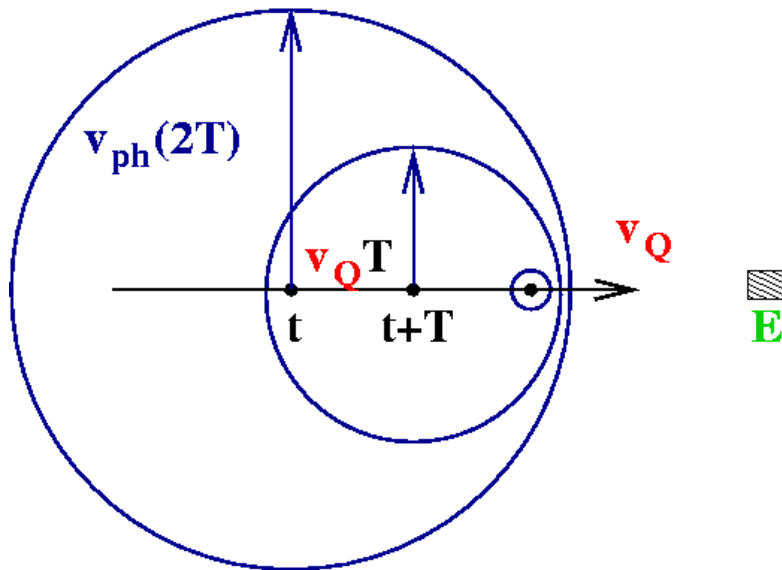
### Stationäres Wellenbild, wenn

- **Gleiche Frequenz (sonst Schwebung)**
- **Feste Phasenbeziehung (Kohärenz)**  
also entweder durch Reflexion oder phasenstarre Quellen ...



## Bewegte Quelle: Doppler-Effekt

Bewegt sich die Quelle auf den Empfänger zu, so nimmt dieser eine höhere Frequenz wahr



$$f_E = f_0 \frac{v_{ph}}{v_{ph} - v_Q}$$

'aufeinander zu':

$$f_E > f_0$$

'voneinander weg':

$$f_E < f_0$$

## Überschallgeschwindigkeit:

- Bei  $v_Q > v_{ph}$  überholt die Quelle die von ihr ausgesandten Wellen.
- Es bildet sich eine kegelförmige Wellenfront aus (Mach-Kegel).
- Sinus des Öffnungswinkels:  $v_{ph}/v_Q$  (=Mach-Zahl)

## Bemerkung zum Dopplereffekt

### Herleitung der Formel:

Wie aus der Skizze hervorgeht, ist  $\lambda_E = \lambda_0 - v_Q \cdot T$

Da  $v_{ph} = \lambda_0 \cdot f = \lambda/T$ , ist  $\lambda_E = \lambda_0 \left(1 - \frac{v_Q}{v_{ph}}\right) = \lambda_0 \frac{v_{ph} - v_Q}{v_{ph}}$

Mit  $f_{0(E)} = v_{ph} / \lambda_{0(E)}$  folgt  $f_E = f_0 \cdot \frac{v_{ph}}{v_{ph} - v_Q}$

Die Formel gilt auch für eine sich entfernende Quelle. Dann ist  $v_Q$  eine negative Größe, d.h. im Nenner der Formel steht  $v_{ph} + |v_Q|$  und  $f_E$  ist kleiner als  $f_0$ .

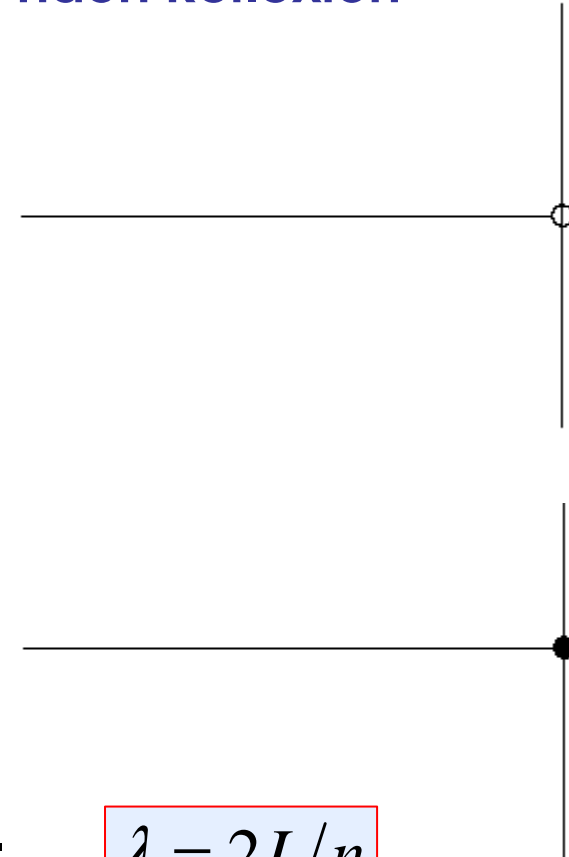
### Anwendungen des Dopplereffekts:

- Messung der Blutgeschwindigkeit (Ultraschall dopplerverschoben)
- Radarkontrolle (gleiches Prinzip)
- Rotverschiebung des Spektrums sich schnell entfernender Sterne dient der Geschwindigkeitsermittlung

## Superposition von Wellen - stehende Wellen nach Reflexion

*Je nach Art der Reflexion kann eine zusätzliche Phase auftreten:*

- **Freies, weiches Ende**  
-> kein Phasensprung
- **Festes, hartes Ende**  
-> Phasensprung um  $\pi$   
(senkrechte Kraft)



$$\lambda = 2L/n$$

**Bei zwei festen Enden (schwingende Saite) ergeben sich aus den Randbedingungen feste Schwingungsmoden (sonst Auslöschung), Grundton ( $n=1$ ) und Obertöne ( $n>1$ )**



## Schallwellen:

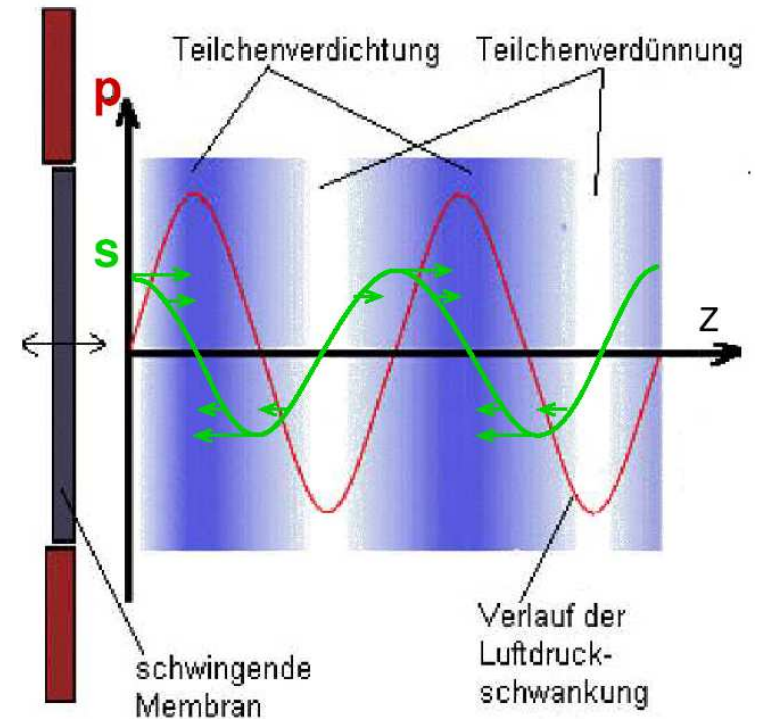
wellenförmige Fortpflanzung von Druck- oder Dichteschwankungen in elastischen Medien wie Gasen, Flüssigkeiten, Festkörpern.

**In Fluiden:** longitudinal (Orientierung der Bewegungsamplitude von Molekülen parallel zur Ausbreitungsrichtung)

**In Festkörpern:** transversal (Bewegungsamplitude senkrecht zur Ausbreitungsrichtung), oder longitudinal wie bei Fluiden.

## Einteilung nach Frequenzen:

Infraschall	:	$\nu \leq 16 \text{ Hz}$
Hörbarer Schall:		$16 \text{ Hz} < \nu < 16 \text{ kHz}$ Versuch
Ultraschall	:	$16 \text{ kHz} < \nu$
Hyperschall	:	$10 \text{ MHz} < \nu$



**P:** Druck  
**S:** Auslenkung

## Schall-Erzeugung:

### Schallerzeugung durch stehende Wellen auf Festkörpern:

schwingende Saite  
 Stimmgabel  
 Orgelpfeife  
 Lautsprechermembran

#### Beispiel 1: beidseitig eingespannte Saite

-> stehendes Wellenfeld bei  
 bestimmten **Eigen-** oder  
**Resonanzfrequenzen**

$$l = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$f_n = n \cdot f_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

