S.R. Wiederholung:

Klassisch		*relativistisch*
∘ Raummetrik, Zeitmetrik	$\rightarrow$	Raumzeitmetrik
∘ Masseerhaltung, Energieerh.	$\rightarrow$	Energie-Masse Erhaltung
∘ el. Feld, magn. Feld	$\rightarrow$	el.-magn. Feld

Lorentz-Transformationen:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) & \qquad x &= \gamma(x' + vt') \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) & \qquad t &= \gamma(t' + vx'/c^2) \end{aligned}}$$

Geschwindigkeitsaddition:

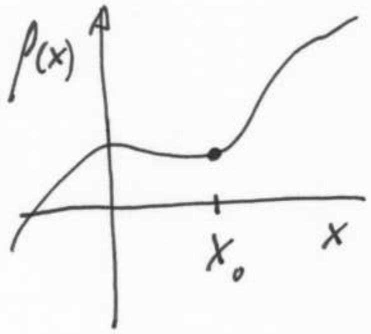
$$\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}}$$

Teste Symmetrien und Grenzfall $v \ll c$!

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

Lorentzfaktor

Taylorentwicklung



Annäherung der Fkt. $f(x)$ im Punkt x_0 durch Potenzen $(x-x_0)^n$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)\,(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x-x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

Beispiel Entwicklung um $v=0$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots$$

$$\gamma'(v=0) = 0$$
$$\gamma''(v=0) = 1/c^2$$
$$\vdots$$

$$\gamma'(v) = \frac{-\tfrac{1}{2}\left(-2\frac{v}{c^2}\right)}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}$$

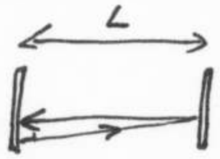
$$\gamma''(v) = \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} - \frac{v\cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-2\frac{v}{c^2}\right)}{\left(1-v^2/c^2\right)^{5/2}}\right]$$

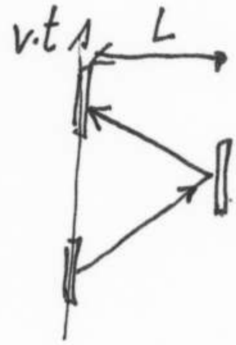
Zeitdilatation: (Zeitdehnung)

$$\textcircled{t'} = \frac{t - \frac{v}{c^2}\cdot \textcircled{x}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Zeit u. Raum nicht unabh.

Einsteins Lichtuhr





$$\Delta t' = \frac{2L}{c}$$

im bewegtem System
→ ruhende Uhr

im ruhenden System
→ mit $v \neq 0$ bewegte Uhr

$$c \cdot \frac{\Delta t}{2} = \sqrt{L^2 + \left(v \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2}$$

$$c^2 \Delta t^2 = (2L)^2 + v^2 \Delta t^2$$

$$\Delta t = \underbrace{\frac{2L}{c}}_{\Delta t'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta t' \cdot \gamma$$

$$\boxed{\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma}$$

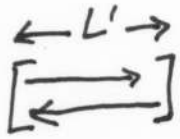
Zeitdilatation

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_E$$

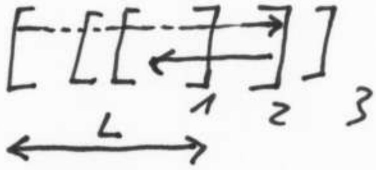
t_E: Eigenzeit
≙ Zeit im ruhenden Systems

Längenkontraktion

- mitbewegtes System $\rightarrow$ ruhende Uhr
- ruhendes System $\rightarrow$ mit $v \neq 0$ bewegte Uhr



$$\Delta t' = \frac{2L'}{c}$$



Spiegelpositionen zum Zeitpunkt 1, 2, 3

$$c t_{12} = L + v \cdot t_{12} \qquad t_{12} = \frac{L}{c-v}$$

$$c t_{23} = L - v t_{23} \qquad t_{23} = \frac{L}{c+v}$$

$$\Delta t = t_{12} + t_{23} = L\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right) = L \frac{2c}{c^2 - v^2}$$

$$= \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2} = \frac{2L}{c} \cdot \gamma^2$$

Zeitdilatation $\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{2L'}{c} \cdot \gamma$

Vergleich liefert $\quad L' = L \cdot \gamma$

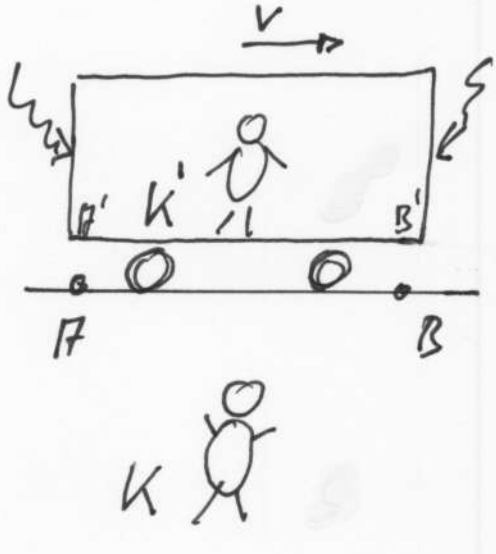
Längenkontraktion $\quad \boxed{L = \frac{L'}{\gamma} = L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

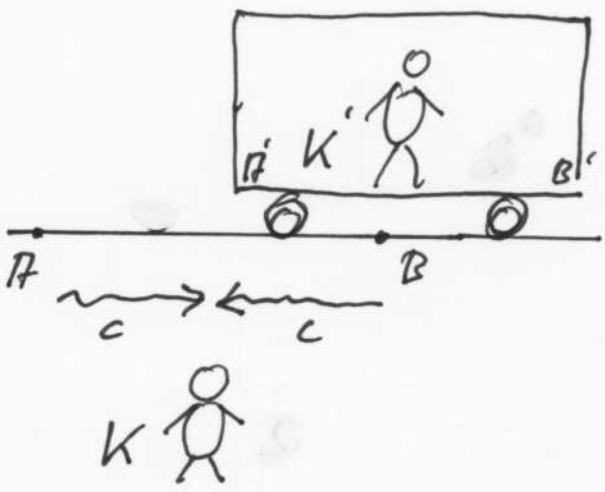
Im ruhenden Inertialsystem erscheint ein bewegter Maßstab verkürzt. $\quad L = \frac{L_{Ruhe}}{\gamma}$

<u>Gleichzeitigkeit</u>

Vergangenheit - Gegenwart - Zukunft
können sich in relativistischen Systemen ändern bzw. umkehren.

Beispiel (nach Einstein):





K sieht beide Blitze <u>gleichzeitig</u>

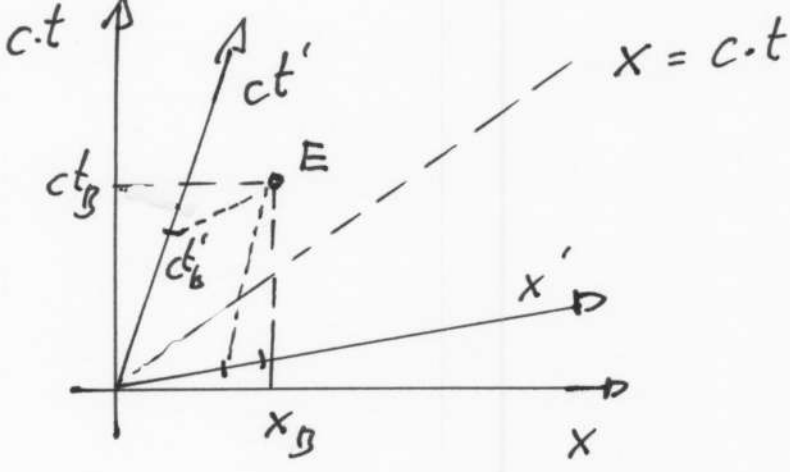
K weiß: K' bewegt sich, also sieht K' zuerst B-Blitz dann A-Blitz

K' ist in einem Inertialsystem (mit $c = \text{const}$), Da A' und B' gleiche Entfernung, kommt K zu dem Schluß, daß B-Blitz vor A-Blitz eingeschlagen.

Für jeden Beobachter ist die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an verschiedenen Raumpunkten abhängig vom verwendeten Bezugssystem!

Minkowski Diagramme

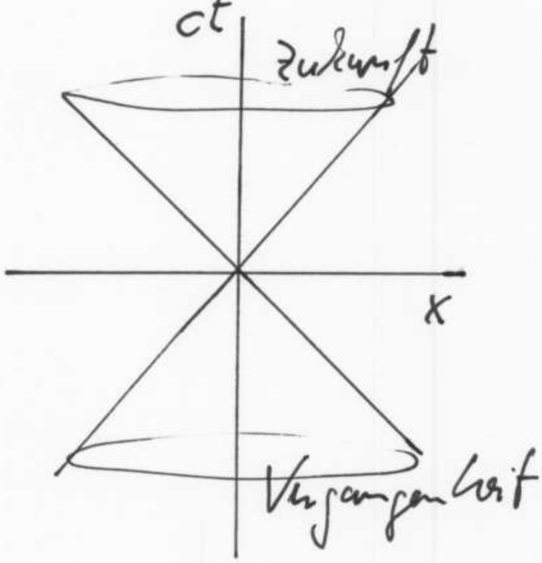
Raum - Zeit Diagramm: "Ereignisraum"



- Lorentztransformation $(x_B, t_B) \to (x'_B, t'_B)$ der Koordinaten eines Ereignisses E
- Maßstab für die "relativistische Distanz"

$$\boxed{s^2 = (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - (x')^2}$$

▷ unverändert bei Lorentz-Transf. !



Relativistische Massenzunahme

Erfahrung: Eine äußere Kraft kann beliebig lange auf ein Teilchen wirken und dieses beschleunigen.

Wie ist dies mit $v_{max} \leq c$ vereinbar?

$$F = m \cdot a$$

relativistische Massenänderung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad m_0 : \text{Ruhemasse}$$

Impuls $\quad \vec{p} = m \cdot \vec{v} = \dfrac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Kraft

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot v)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

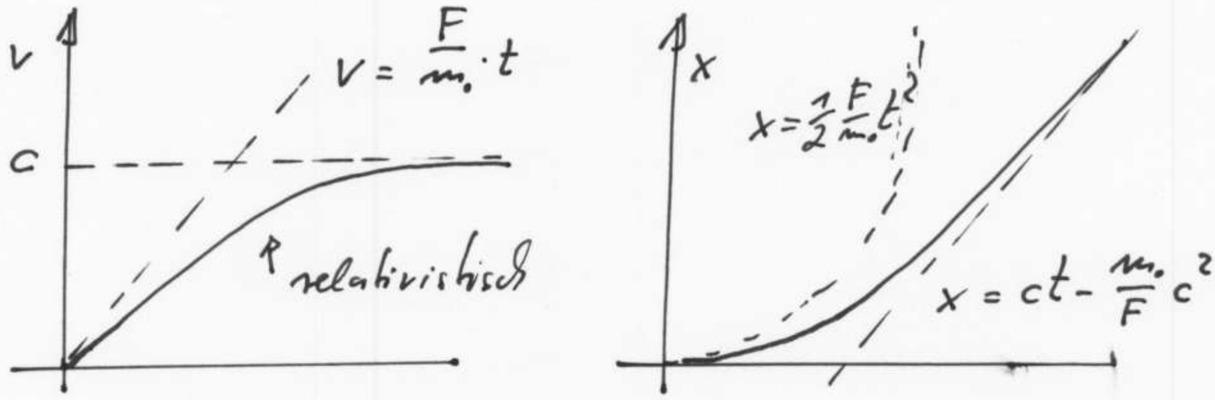
$$\dots$$

$$= \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{F = \gamma^3 \cdot m_0 \cdot a}$$

Grundgleichung der relativistischen Dynamik

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \; ; \quad \vec{p} = m_{rel} \cdot \vec{v} \quad \text{mit} \quad m_{rel} = \gamma \cdot m_0$$



Relativistische Energie

$$E_{kin} = \int_0^{s(v)} F\,ds = \int_0^v \frac{d}{dt}(m\cdot v)\,ds = \int_0^v v\,d(m\cdot v)$$

Partielle Integration:

$$E_{kin} = m\cdot v^2 - \int_0^v m v\,dv = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \int_0^v \frac{m_0 v\,dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} - m_0 c^2$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2 = (m - m_0)\,c^2$$

$$\boxed{m c^2 = m_0 c^2 + E_{kin}}$$

Gesamtenergie Ruheenergie kinetische Energie

Energiezunahme $\hat{=}$ Massenzunahme

$$\boxed{E = m c^2}$$

Beispiel : Elektron $m_0 c^2 = 0.511 \; MeV$

z.B. $E_{kin} = 2 \; MeV$ $\quad E_{kin} \approx 4 \, m_0 c^2$

$$E = mc^2 = 5 \, m_0 c^2$$

oder $\gamma(v) = 5$ $\quad v \approx$