Schwingungen und Wellen

- harmonische Schwingungen

$$F_{Feder} = -D \cdot x \qquad \text{„Rückstellkraft"}$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx \qquad \text{Bew. Gl.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0} \qquad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

„Schwingungsgleichung"

Ansatz $x_A(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$

$$\Rightarrow \dot{x}_A(t) = -A\,\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_A(t) = -A\,\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$

Einsetzen $\Rightarrow \ddot{x}_A + \omega_0^2 x_A = -A\omega_0^2 \cos\omega_0 t + A\omega_0^2 \cos\omega_0 t = 0$

Auch $x_B(t) = \underline{B} \cdot \sin(\omega_0 t)$ ist eine Lösung!

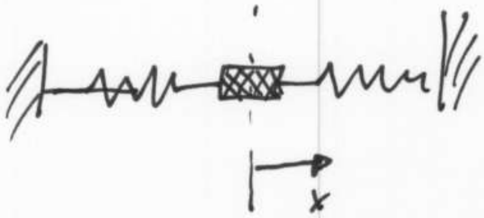
allg. Lösung

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

A, B durch Randbed. festgelegt. $A = x(t=0)$

ω_0 unabh. von Amplitude! $B = \frac{1}{\omega_0} \cdot v(t=0)$

Versuch



$$F_R = -D_1 x + (-D_2 x)$$

$$= -2D \cdot x$$

$$\rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2D}{m}} \sim \sqrt{\frac{1}{m}}$$

Ersetze $A = C \cdot \cos\varphi$, $B = -C \cdot \sin\varphi$

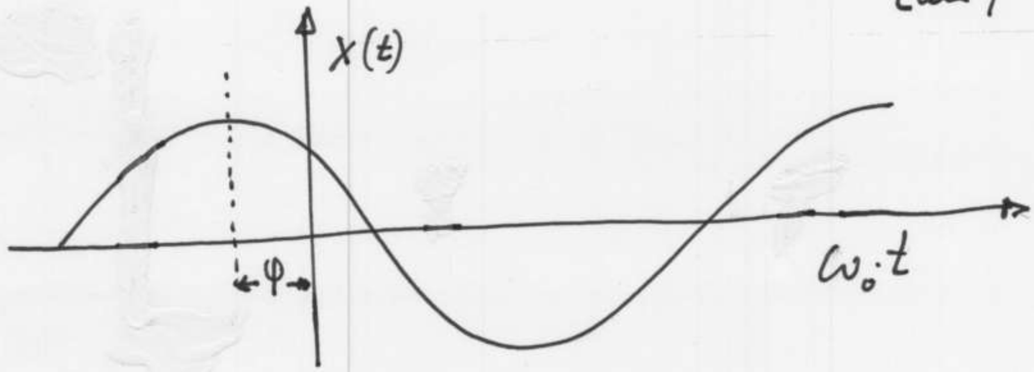
$$\Rightarrow x(t) = C \cdot \left[\cos\varphi \cos(\omega_0 t) - \sin\varphi \sin(\omega_0 t)\right]$$

Additions-theorem

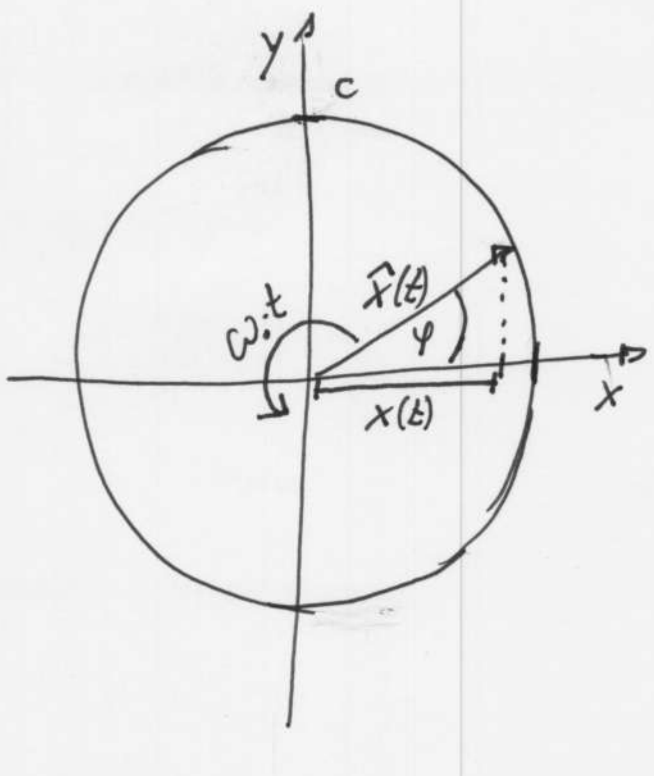
$$\boxed{x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

Amplitude Phase

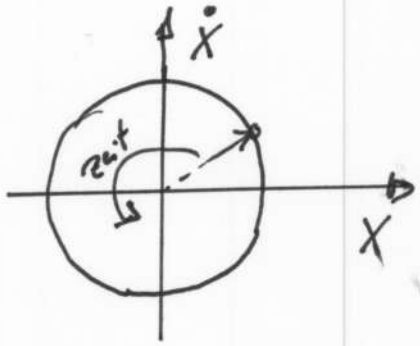
$$\tan\varphi = \frac{B}{A}$$



Die harmonische Schwingung als Projektion einer Kreisbewegung



2-dim Darstellung von Schwingungen



Phasenraum $(x, \dot{x})$

harm. Schw. $\Rightarrow$ Kreisbahn

Komplexe Darstellung

$c = a + ib$ komplexe Zahl

a: Realteil, b: Imaginärteil

$i^2 = -1$

$c^* = a - ib$ komplex Konjugierte

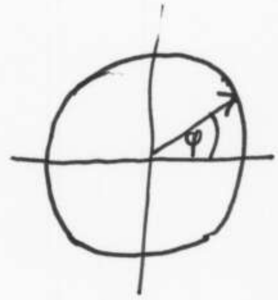
$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x}$$

Euler Formel

Polardarstellung einer komplexen Zahl

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$



Schwingungsgleichung (komplexe Lsg)

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0 x = 0}$$

Ansatz $x(t) = C\, e^{\lambda \cdot t}$

$$\dot{x}(t) = \lambda \cdot C\, e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 C\, e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 C e^{\lambda t} + \omega_0 C e^{\lambda t} = 0$$

$\rightarrow$ $\boxed{\lambda^2 + \omega_0^2 = 0}$ charakteristisches Polynom der schw. Gl.

$$\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \omega_0$$

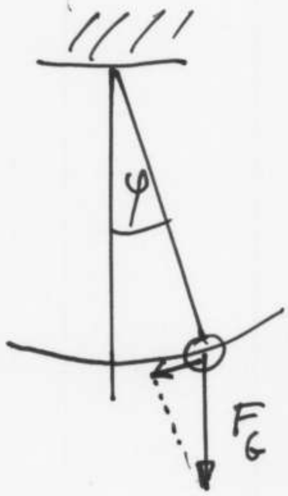
$\rightarrow$ $x(t) = C_1\, e^{i\omega_0 t} + C_2\, e^{-i\omega_0 t}$

Damit $x(t)$ reel wähle $C_1 = C$ und $C_2 = C^*$

$\Leftrightarrow$ $x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$

mit $A = C + C^*$ und $B = i\,(C - C^*)$

Das Fadenpendel (mathematische Pendel)



$$F_\varphi = -|F_G|\sin\varphi = -m\cdot g\cdot\sin\varphi$$

$$m\cdot l\cdot\ddot{\varphi} = -m\cdot g\cdot\sin\varphi$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$

Taylor Entw. $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \dots$

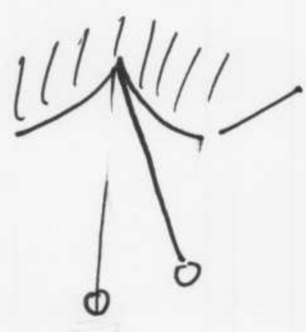
$$\boxed{\omega_{MP} = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

hängt nicht von Masse ab!

Große Auslenkung:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi}{2} \dots\right)$$

$\varphi < 23^\circ$ Fehler $< 1\%$

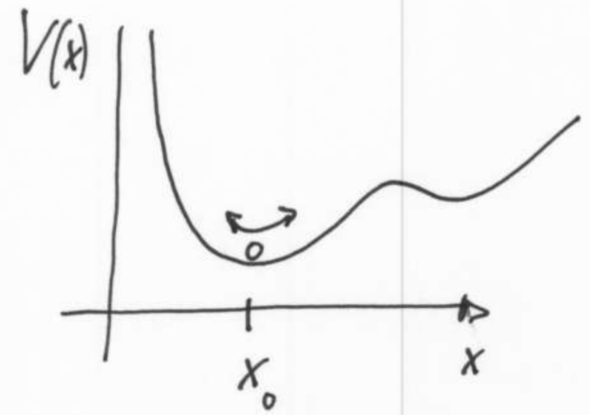


Zykloide : verkürzt das Pendel

Sekundenpendel:

$$1\,\text{sec} = T_{1/2} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = 0{,}994\,m$$

Schwingungen um eine Gleichgewichtslage



$V(x)$: potentielle Energie

x_0 : Gleichgew. Lage

$$\frac{dV(x_0)}{dx} = 0$$

$$F_{Rück} = - \operatorname{grad} V(x_0)$$

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

$$F(x) = - \frac{dV}{dx} = - k(x-x_0) \qquad \boxed{k = V''(x_0)}$$

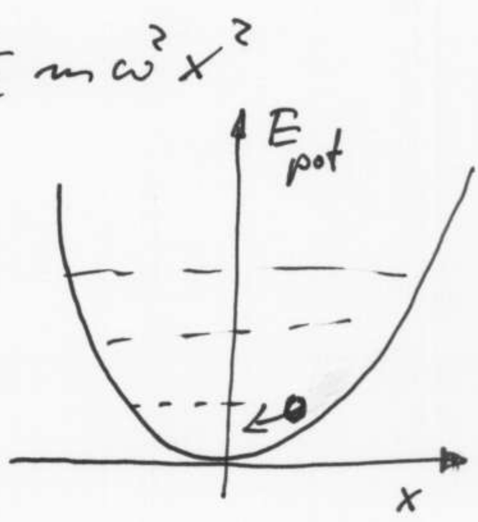
Kinetische und potentielle Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega t$$

$$= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 (1 - \cos^2 \omega t)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2)$$

$$E_{pot} = -\int_0^x D x \, dx = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

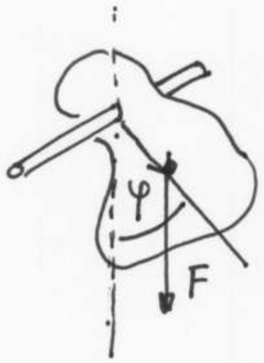


$$E_{Ges} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Quantenmechanik

$$\Rightarrow E = \hbar \omega (n + 1/2)$$

Physikalisches Pendel (Versuch)



Drehmoment

$$M = I \cdot \alpha = -\left(\vec{r} \times \vec{F}_G\right)$$

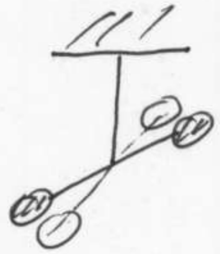
$$I \cdot \ddot{\varphi} = -r_s \cdot m \cdot g \cdot \sin\varphi$$

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

$$\curvearrowright \quad \ddot{\varphi} = -\frac{r_s\, m \cdot g}{I} \cdot \varphi$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{r_s\, m \cdot g}{I}}$$

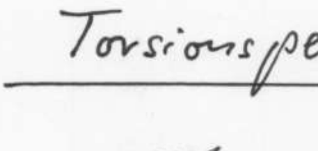
Torsionspendel (Versuch)



$$I \cdot \ddot{\varphi} = -D_R \cdot \varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D_R}{I}} \qquad D_R = \frac{\pi}{2}\, G\, \frac{d^4}{16\ell}$$

Molekülschwingung



$\curvearrowright$ Schwerpunktsystem

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_R}} \qquad m_R: \text{ reduzierte Masse}$$

$$1/m_R = 1/m_1 + 1/m_2$$