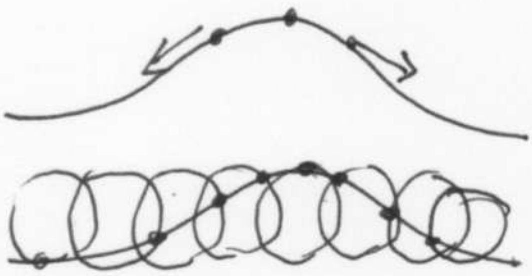
Wasserwellen



Masse bewegt sich auf Kreisen !

Komplexes Problem ⇒ zu berücksichtigen :

g : Schwerebeschl.

σ : Oberflächenspannung

h : Wassertiefe

$$v_{ph} = \sqrt{\left(\frac{g\cdot\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\varrho\cdot\lambda}\right)\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$$

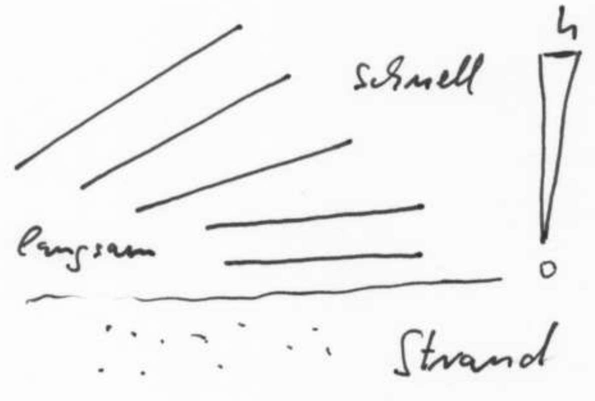
Näherungen :

$v_{ph} = \sqrt{g\cdot h}$ Flachwasserwellen, keine Dispersion

$v_{ph} = \sqrt{\frac{g\cdot\lambda}{2\pi}}$ Schwerewellen, normale Dispersion $v_{ph} \sim \sqrt{\lambda}$

$v_{ph} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\varrho\cdot\lambda}}$ Kapillarwellen anomale Dispersion $v_{ph} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Phänomen: "Brechung" von Flachwasserwellen:



$$v_{ph} \approx \sqrt{g \cdot h}$$

$\Rightarrow$ flache Wellen langsamer

Dispersion, Gruppengeschwindigkeit

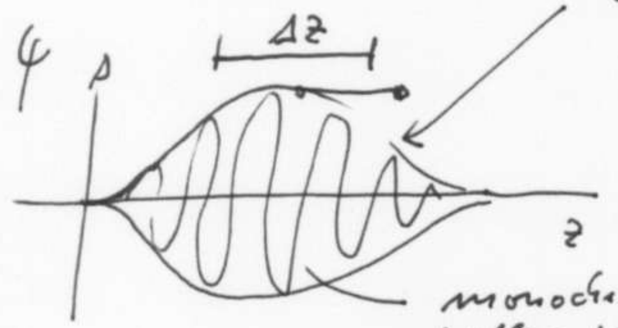
$v_{ph} \to v_{ph}(\lambda)$ Dispersion : Phasengeschw. Fkt von Wellenlänge

$$\boxed{v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k}}$$ Dispersionsrelation

Dispersion hat Auswirkung, wenn Wellen unterschiedl. Wellenlänge sich als Wellengruppe gemeinsam ausbreiten.

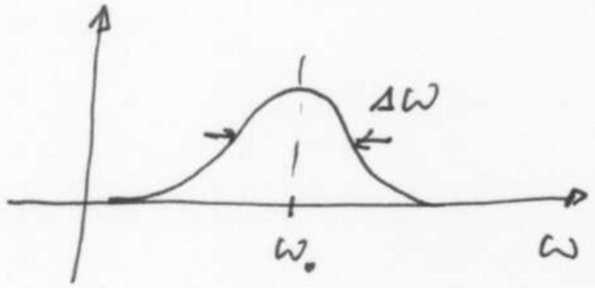
Einhüllende : v_{Gr}

Impulsartige Störung



monochr. Welle : v_{ph}

Fourier-Transf.



$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta z}$$

Einhüllende bewegt sich mit Gruppengeschwindigkeit

$$\boxed{v_{Gr} = \frac{d\omega}{dk}}$$ $$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_{Gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\,(v_{ph}\cdot k)}{dk}$$

$$= v_{ph}(k) + k \cdot \frac{d\,v_{ph}(k)}{dk} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\boxed{v_{Gr} = v_{ph} - \lambda\,\frac{d\,v_{ph}}{d\lambda}} \qquad \text{(Rayleigh)}$$

$$\frac{d\,v_{ph}}{d\lambda} > 0 \Rightarrow v_{Gr} < v_{ph} \quad : \text{ normale Dispersion}$$

$$\frac{d\,v_{ph}}{d\lambda} < 0 \Rightarrow v_{Gr} > v_{ph} \quad : \text{ anomale Dispersion}$$

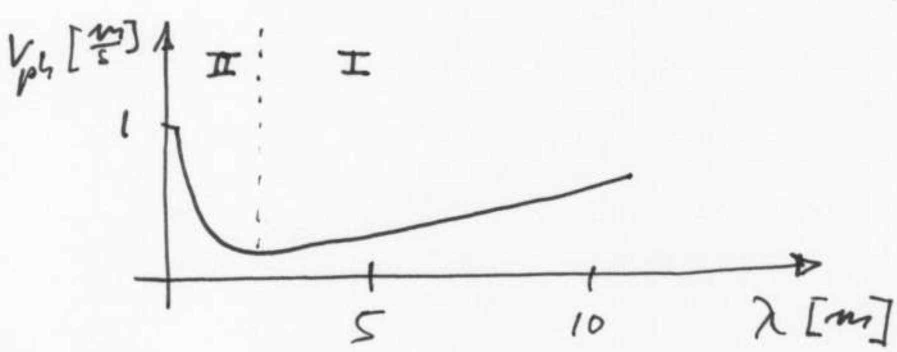
<u>Beispiel</u>

I.) Schwerewellen $v_{ph} = \sqrt{\frac{g\cdot\lambda}{2\pi}}$ $\qquad v_{Gr} = \frac{1}{2}\,v_{ph}$

(normale Dispersion)

II.) Kapillarwelle $v_{ph} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}$ $\qquad v_{Gr} = \frac{3}{2}\,v_{ph}$

(anomale Dispersion)



Reflexion (1-dim)

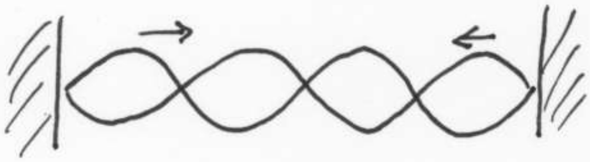
Wellen werden in Abhängigkeit vom Abschluß mit Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 0$ oder $\Delta\varphi = \pi$ reflektiert

- "offenes Ende" $\Delta\varphi = 0$

- "geschlossenes Ende" $\Delta\varphi = \pi$

Stehende Wellen (1-dim)

"Wellen im begrenztem Raum" $\Rightarrow$ Selbstinterferenz



$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

$$= A \cdot \sin(\omega t + kz) + A \sin(\omega t - kz + \pi)$$

$$= A \left[\sin(\omega t + kz) - \sin(\omega t - kz) \right]$$

$$\left[\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \right]$$

$$\rightsquigarrow \quad \xi = \underbrace{2A \sin(kz)}_{} \cdot \cos(\omega t)$$

ortsabhängige Amplitude · harm. Schwingung

$A = 0$ für $kz = n \cdot \pi \quad n = 1, 2, 3 \dots$

$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot z = n \cdot \pi \qquad z = \frac{1}{2} n \cdot \lambda$ Knoten

$A = \max$ für $kz = (2n-1)\frac{\pi}{2} \qquad n = 1, 2 \dots$

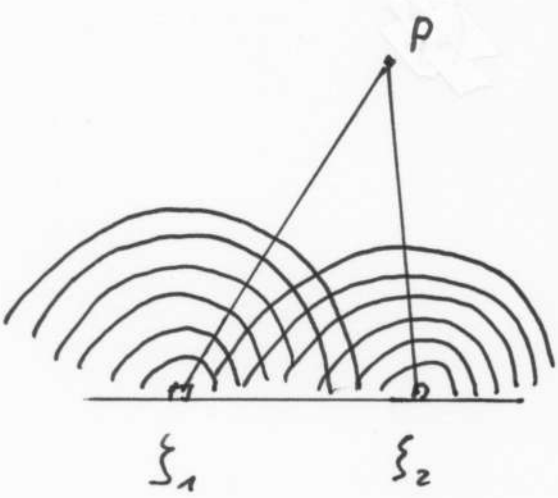
Bäuche

Überlagerung von Wellen

aus der Linearität der Wellengleichung folgt das Prinzip der ungestörten Überlagerung

"Superposition"

$$\xi(\vec{x},t) = \xi_1(\vec{x},t) + \xi_2(\vec{x},t)$$



ξ_1, ξ_2 : kohärente Quellen

P : Beobachtungspunkt

d.h. ξ_1, ξ_2 haben eine feste Phasenbeziehung

Betrachte ξ_1, ξ_2 als ebene Wellen (Fernfeldnäherung)

$$\xi_P(x,t) = A_1 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{x}_1 + \varphi_{01}) + A_2 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{x}_2 + \varphi_{02})$$

$$\varphi_1 = \vec{k}_1 \vec{x}_1 - \varphi_{01} \quad ; \quad \varphi_2 = \vec{k}_2 \vec{x}_2 - \varphi_{01}$$

Berechne Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ (ortsfest)

siehe Überlagerung von Schwingungen $\Rightarrow$ $\xi_P = C \cdot \cos(\omega t - \varphi)$ mit

$$C^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \Delta\varphi$$

$$\tan\varphi = - \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$