LMU München

Lehrstuhl für Theoretische Nanophysik
Dr. A. Weichselbaum
Dr. F. Heidrich-Meisner

WS 2010/2011

Abgabe: 26.10.2010

1. Übungsblatt Theoretische Physik im Querschnitt

21.10.2010

1: Rakete

Eine Raketenstufe der Masse M_0 bewege sich zunächst kräftefrei und habe die Geschwindigkeit V_0. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Antrieb gezündet: Zu einem Zeitpunkt $t > 0$ werde im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ die Masse $\mathrm{d}M$ mit der Geschwindigkeit v relativ zur Rakete und antiparallel zu ihrer Geschwindigkeit ausgestoßen und die Geschwindigkeit V der Rakete um $\mathrm{d}V$ vergrößert. Es handelt sich also um ein eindimensionales Problem.

a. Betrachten Sie den (momentanen) Impuls der Rakete zu einem Zeitpunkt $t > 0$. Die momentane Masse der Rakete sei M, und ihre momentane Geschwindigkeit sei V. Wie verteilen sich die Impulse der Rakete und der ausgestoßenen Masse zu einem infinitesimal späteren Zeitpunkt $t + \mathrm{d}t$ auf den Gesamtimpuls?

b. Vernachlässigen Sie infinitesimal kleine Terme von höherer als erster Ordnung, und geben Sie die Differentialgleichung für die Abhängigkeit der Variablen V und M voneinander an. *Zur Kontrolle ein Zwischenergebnis:* $-M\mathrm{d}V = v\mathrm{d}M$.

c. Integrieren Sie diese Differentialgleichung mit den angegebenen Anfangsbedingungen. Skizzieren Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Masse.

d. Die Rate $\mu = -\dot{M}$ des Massenausstoßes sei zeitlich konstant.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit V als Funktion der Zeit t.
Wie wird die Kurve von Teilaufgabe c) zeitlich durchlaufen?

e. Der Treibstoff mache gerade die Hälfte der anfänglichen Masse der Rakete aus. Welche Endgeschwindigkeit erreicht die Rakete und wie kann man sie optimieren?

2: Erzwungene Schwingungen

Eine punktförmige Masse m schwinge in einer Raumdimension im harmonischen Potential

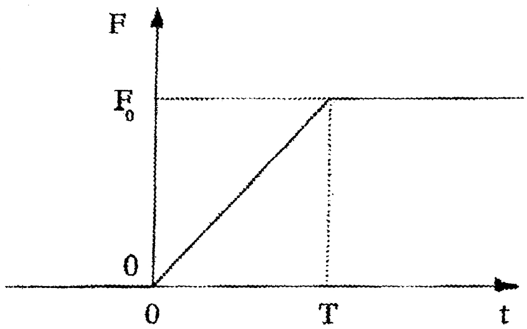
$$U(x) = \frac{D}{2}x^2.$$

Zur Zeit $t = 0$ soll eine zeitabhängige Kraft $F(t)$ eingeschaltet werden, die auf die Masse wirkt.

a. Formulieren Sie die Bewegungsgleichung für $x(t)$ für den Fall einer beliebigen Kraft $F(t)$.

b. Lösen Sie die Bewegungsgleichung zunächst für den Fall $F(t) = 0$. Dabei sollen die Startwerte der Auslenkung und der Geschwindigkeit vorgegeben werden, $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$. Insbesondere sollen Sie berechnen, mit welcher Frequenz und Amplitude das Teilchen um seine Ruhelage schwingt.

c. Nun soll sich das Teilchen für die Zeiten $t < 0$ in der Ruhelage $x(t) = v(t) = 0$ befinden. Bei $t = 0$ wird eine Kraft eingeschaltet, die bis zur Zeit T linear auf den Wert F_0 ansteigt und danach den konstanten Wert F_0 annimmt, wie in der Skizze gezeigt ist.



Wie lautet die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung in den Bereichen $0 < t < T$ und $T < t$?

d. Lösen Sie die vollständige Bewegungsgleichung durch Berücksichtigung von Rand- und Stetigkeitsbedingungen.

e. Nach der Anschaltzeit T schwingt das Teilchen mit der Amplitude A um eine neue Gleichgewichtslage. Zeigen Sie die Gleichung

$$A = \frac{2F_0}{mT\omega^3}|sin\frac{\omega T}{2}|, \qquad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

f. Welche mechanische Arbeit W leistet die Kraft $F(t)$ während der Anschaltphase $0 < t < T$?

g. Betrachten Sie den Grenzfall einer sehr kurzen Anschaltzeit $T \ll \frac{2\pi}{\omega}$, bei der die Auslenkung $x(T)$ vernachlässigt werden kann. Zeigen Sie, dass in diesem Grenzfall die Energie E für alle Zeiten nach dem Einschalten durch die folgende Gleichung bestimmt wird:

$$E = \frac{1}{2m}\left(\int_0^T F(t)\mathrm{d}t\right)^2$$

3: Konservative Kraftfelder

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind

- Die Arbeit an einem Teilchen hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab.

- Das Kraftfeld ist konservativ, also $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$.
- $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$.

Wobei Arbeit für einen Weg $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ gegeben ist durch

$$W_{ab} = \int\limits_{\Gamma} F(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$