LMU München

Lehrstuhl für Theoretische Nanophysik
Dr. A. Weichselbaum
Dr. F. Heidrich-Meisner

WS 2010/2011

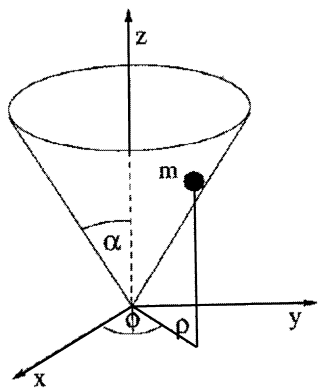
Abgabe: 2.11.2010, 10:15h

2. Übungsblatt Theoretische Physik im Querschnitt

28.10.2010

1: Dynamik einer Punktmasse auf einem Kegelmantel

Eine Punktmasse m bewege sich auf der Innenseite eines Kreiskegels mit seiner Achse parallel zur z-Achse (siehe Zeichnung). Die Gravitationskraft zeige in die negative z-Richtung.



a. Bestimmen Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten die zugehörige Lagrangefunktion in Abhängigkeit von ρ (Radius) und ϕ (Polarwinkel).

b. Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab.

c. Welche Variable ist zyklisch?

   Zeigen Sie, dass der Drehimpuls L_z erhalten ist.

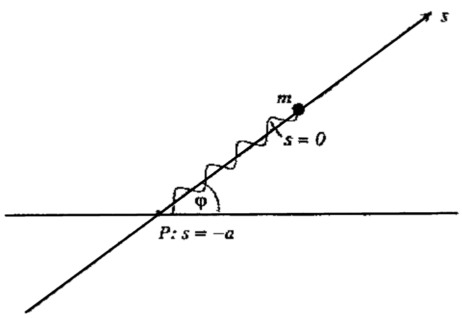
d. Bestimmen Sie mit Hilfe der Teilaufgaben b) und c) den Radius ρ_0 einer Kreisbahn auf dem Kegelmantel mit fester Höhe z_0 als Funktion von L_z.

   Zwischenergebnis: $m(1+\cot^2\alpha)\ddot{\rho} - \frac{L_z^2}{m\rho^3} + mg\cot\alpha = 0$

e. Zeigen Sie, dass sich mit dem Ansatz $\rho = \rho_0 + \rho_1$ und $\rho_1 \ll \rho_0$ aus den Bewegungsgleichungen (siehe Teilaufgabe b) die Gleichung eines harmonischen Oszillators für ρ_1 ergibt. Geben Sie die zugehörige Schwingungsfrequenz ω_0 an.

2: Rotierende Stange

Ein Massenpunkt der Masse m gleite reibungsfrei auf einer masselosen, unendlich langen Stange und sei mit einer harmonischen Kraft $F = -ks$, $k > 0$ an einem Punkt $s = 0$ auf der Stange fixiert. Die harmonische Kraft werde durch eine Feder mit Ruhelänge a ausgeübt, die an einem festen Punkt P (bei $s = -a$) auf der Stange verankert ist. Die Stange kann ferner in einer Ebene um den festen Punkt P rotieren; der Winkel gegen eine feste Gerade in dieser Ebene sei φ. Die Schwerkraft spiele keine Rolle.



a. Stellen Sie die Lagrangefunktion des Massenpunktes in den Koordinaten $s(t)$ und $\varphi(t)$ auf. (Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass für die Position des Massenpunktes immer $s(t) > -a$ gilt.)

b. Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen? Interpretieren Sie die Terme proportional zu $\dot{\varphi}$ aus der Sicht eines mitrotierenden Beobachters.

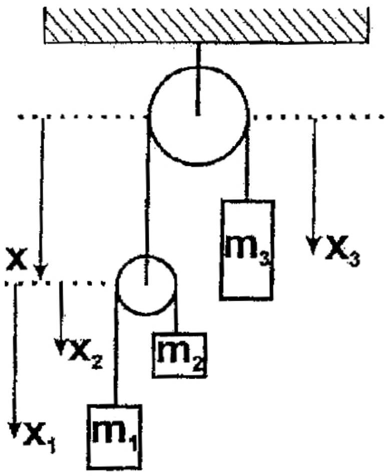
c. Eine der Koordinaten ist zyklisch. Wie lautet der entsprechende Erhaltungssatz? Was ist die Bedeutung der entsprechenden erhaltenen Größe? Gibt es eine weitere Erhaltungsgröße , und wie lautet diese?

d. Eliminieren Sie (durch Nutzung des entsprechenden Erhaltungssatzes) die zyklische Koordinate, und bringen Sie die so erhaltene Gleichung für $s(t)$ in die Form $m\ddot{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}V_{eff}(s)$. Wie lautet das effektive Potential?

e. Skizzieren Sie das effektive Potential, finden Sie den Punkt s_0 (unter der Annahme $|s_0| \ll a$) an dem es minimal wird und diskutieren Sie qualitativ die mögliche Bewegung.

3: Rollen

Eine Punktmasse m_3 hängt an einem Ende eines masselosen Seils fester Länge, das über eine fixierte, masselose, reibungsfreie Scheibe läuft. Am anderen Ende des Seils ist eine masselose Scheibe befestigt, über die ein zweites masseloses Seil fester Länge reibungsfrei läuft, an dem wieder zwei Punktmassen, nämlich m_1 und m_2 befestigt sind (siehe Abbildung). Auf alle Massen wirkt die Schwerkraft entlang des Lots (senkrecht nach unten in der Abbildung).



a. Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(x_1, x_3, \dot{x_1}, \dot{x_3})$ dieses Systems. Beachten Sie die Zwangsbedingungen $x + x_3 = const.$ sowie $x_1 + x_2 = const.$

b. Bestimmen Sie die Beschleunigung der Masse m_3.

c. Diskutieren Sie das Ergebnis: Zeigen Sie, dass die Beschleunigung von m_3 verschwindet wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$m_3 = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

Betrachten Sie dabei speziell den Grenzfall $m_1 = m_2$. Begründen Sie qualitativ warum die Beschleunigung von m_3 in diesem Grenzfall verschwindet.