LMU München

WS 2010/2011

Lehrstuhl für Theoretische Nanophysik
Dr. A. Weichselbaum
Dr. F. Heidrich-Meisner

Abgabe: 9.11.2010, 10:15h

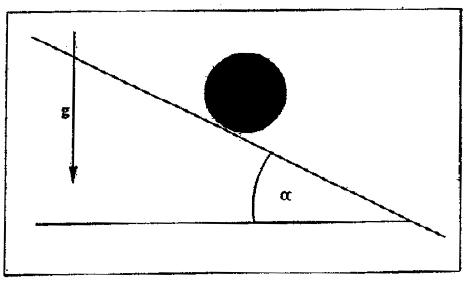
3. Übungsblatt Theoretische Physik im Querschnitt

4.11.2010

1: Rollender Zylinder auf schiefer Ebene

Ein homogener Vollzylinder (Masse M, Radius R) rolle im Schwerefeld ohne Schlupf auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α. Die Zylinderachse sei senkrecht zur Schwerkraft ausgerichtet. Als verallgemeinerte Koordinate, die Position und Bewegung des Zylinders beschreibt, nehme man den Drehwinkel $\varphi(t)$ des Zylinders um seine Achse.

Angabe: Bei Drehung um die Zylinderachse hat das Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders mit Masse M und Radius R den Wert $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$.



a. Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt des Zylinders bei Drehung um den Winkel φ die Strecke $R\varphi$ zurücklegt.

b. Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(\varphi, \dot{\varphi})$ für die Bewegung des Zylinders auf und berechnen Sie die Lagrangegleichung.

c. Lösen Sie die Lagrangegleichung mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(t=0) = 0, \qquad \dot{\varphi}(t=0) = \Omega_0$$

Skizzieren Sie den Verlauf von $\varphi(t)$.

2: Fallender Stein auf rotierender Erde

Wir lassen einen Stein der Masse m in einen Brunnen fallen, der am Äquator steht. Wegen der Erdrotation folgt die Trajektorie des Steins nicht dem senkrechten Lot in Richtung Erdmittelpunkt. Diese Bewegung wird im rotierenden Bezugssystem der Erde durch

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_g - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{X})$$

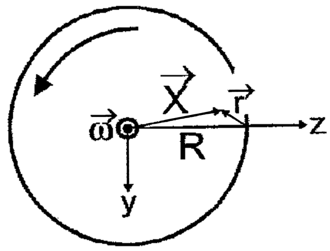


Abbildung 1: Die Erde in Aufsicht. Die Drehachse $\boldsymbol{\omega}$ zeigt zum Nordpol, der über der Papierebene auf der x-Achse liegt. Die Koordinatenachsten y und z liegen in der Äquatorialebene, was für die Vektoren $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{r}$ nicht zutreffen muss.

beschrieben, wobei der Koordinatenursprung im Erdmittelpunkt liegt und die z-Achse durch die Brunnenöffnung verläuft (siehe Abbildung). Wir nehmen an, dass die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ konstant und die Erde eine Kugel mit Radius R ist.

a. Führen Sie die Relativkoordinate

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{X} - R\boldsymbol{e}_z$$

ein, wobei R die Distanz vom Erdmittelpunkt zur Brunnenöffnung ist. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\boldsymbol{r}(t)$ im erdfesten Koordinatensystem. Nehmen Sie hierbei vereinfachend an, dass die Erdanziehungskraft $\boldsymbol{F}_g = -mg_0\boldsymbol{e}_z$ die der ruhenden Erde und unabhängig von $\boldsymbol{r}$ ist, was für nicht zu tiefe Brunnen näherungsweise zutrifft.

b. Lösen Sie diese Bewegungsgleichung zunächst unter Vernachlässigung der Corioliskraft und berechnen Sie die Trajektorie $\boldsymbol{r}_0(t)$ des Steins. Zeigen Sie, dass er einer effektiven Erdbeschleunigung $g_{eff} = g_0 - \omega^2 R$ unterliegt.

c. Ausgehend von dieser Trajektorie $\boldsymbol{r}_0(t)$ addieren wir nun die Corioliskraft. Setzen Sie dazu $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{u}$ und zeigen Sie, dass für geeignete Anfangsbedingungen die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = -2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{u}) \tag{1}$$

gilt.

d. Nehmen Sie schließlich an, dass die Abweichung $\boldsymbol{u}$ vom Lot so klein ist, dass sie auf der rechten Seite von Gleichung (1) vernachlässigt werden kann, und berechnen Sie für diesen Fall explizit $\boldsymbol{u}(t)$. Zeigen Sie, dass die Trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$ gegenüber $\boldsymbol{r}_0(t)$ nach Osten abgelenkt wird.

3: Relativistisches Punktteilchen

Die Lagrange-Funktion L eines freien, relativistischen Punktteilchens in einer Raumdimension (Koordinate x, Geschwindigkeit $v = \dot{x}$) wird angesetzt als

$$L = \lambda\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit, λ eine Konstante.

a. Wie muss man λ wählen, damit man den korrekten nicht-relativistischen Grenzfall für ein Teilchen der Masse m erhält? Verwenden Sie diesen Wert von λ in den folgenden Aufgaben.

b. Der Impuls p kann definiert werden als diejenige Erhaltungsgröße, die aus der Translationsinvarianz von L ($\frac{\partial L}{\partial x} = 0$) folgt.

   Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen p und v.

c. Entsprechend kann man die Energie E definieren als diejenige Erhaltungsgröße, die aus der Zeittranslationsinvarianz von L ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) folgt.

   Bestimmen Sie E sowohl als Funktion von v wie als Funktion von p. (Hinweis: Hamilton-Funktion $H = E$)