LMU München

WS 2010/2011

Lehrstuhl für Theoretische Nanophysik
Dr. A. Weichselbaum
Dr. F. Heidrich-Meisner

Abgabe: 14.12.2010, 10:15h

8. Übungsblatt Theoretische Physik im Querschnitt

8.12.2010

1: Elektrisches Feld und Potential geladener Kugeln

Betrachtet werde eine homogen geladene Kugel mit dem Radius R, der Ladungsdichte ρ und der Gesamtladung q.

a. Wie hängen Ladungsdichte und Gesamtladung zusammen?

b. Geben Sie den Zusammenhang des elektrostatischen Feldes $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ mit dem Skalarpotential $\phi(\boldsymbol{r})$ an. Was kann man allein auf Grund der Symmetrie über Form und Abhängigkeiten von $\phi(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ sagen?

c. Berechnen Sie das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ im Innen- und Außenraum der Kugel mit Hilfe des Gesetzes von Gauß (in der integralen Form).

d. Berechnen Sie das zugehörige Potential $\phi(\boldsymbol{r})$ durch Wegintegration über das elektrische Feld.
Ergebnis zur Kontrolle:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} \frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} & \text{für } r \leq R \\ \frac{1}{r} & \text{für } r \geq R \end{cases}$$

2: Elektrostatische Energie

a. Das Potential einer homogen geladenen Kugel vom Radius R mit der Gesamtladung Q ist gegeben durch

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R^3}(3R^2 - r^2) \text{ für } r \leq R$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Radialkoordinate ist. Berechnen Sie damit die elektrostatische Energie der homogen geladenen Kugel.

b. Leiten Sie nun einen Ausdruck für das Potential einer leitenden Kugel von gleicher Gesamtladung und gleichem Radius her, und berechnen Sie die entsprechende Energie. Vergleichen Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b), und begründen Sie kurz (ein bis zwei Sätze genügen), warum es auch ohne Rechnung physikalisch einsichtig ist, dass eine der Kugeln einen größeren Energieinhalt hat.

c. Gegeben ist die Ladungsverteilung

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{r^2} & \text{für } R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Gesamtladung Q, das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ und das stetige Potential ϕ in Abhängigkeit von ρ_0, R_1 und R_2.

Hinweise:
Das Potential soll im Unendlichen jeweils gegen Null gehen.
Der Gradient einer nur von der Radialkoordinate r abhängenden Funktion $f(r)$ ist gegeben durch

$$\operatorname{grad} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\boldsymbol{e}_r$$

3: Elektrostatische Energie

Die elektrostatische Energie von N Punktladungen q_i an den Orten $\boldsymbol{r}_i$ ist gegeben durch

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i\neq j}^{N}\frac{q_i q_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} \tag{1}$$

a. Wie hängt dieser Ausdruck mit dem Coulomb-Potential zweier Punktladungen zusammen, und welcher Arbeit entspricht die Energie U physikalisch?

b. Betrachten Sie nun eine lokalisierte, kontinierliche Ladungsverteilung mit Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$. Wie lautet der Ausdruck für die elektrostatische Energie in diesem Fall? Leiten Sie das Ergebnis aus Gleichung (1) durch einen Kontinuumsübergang her.

c. Warum braucht man sich im Falle der kontinuierlichen, nicht-singulären Ladungsverteilung ($|\rho(\boldsymbol{r})| < \infty$) nicht um die Bedingung $i \neq j$ in Gleichung (1) zu kümmern?

d. Wie kann man die Energie aus Teilaufgabe b) durch die elektrische Feldstärke, die von der Ladungsverteilung erzeugt wird, darstellen? Verwenden Sie die Poisson-Gleichung

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

oder das Gauß'sche Gesetz.

4: Separation der homogenen Maxwell-Gleichungen

Gegeben sind die allgemeinen Maxwell-Gleichungen ohne Materie

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= \rho/\epsilon_0 \\ \operatorname{div} B &= 0 \\ \operatorname{rot} B - \frac{\partial E}{c^2\partial t} &= \mu_0\boldsymbol{j} \\ \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

wobei die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$ impliziert ist. Entkoppeln Sie die homogenen Maxwell-Gleichungen durch Einführen der Potentiale ϕ und $\boldsymbol{A}$ in Lorenz-Eichung und motivieren Sie den Ansatz für $\boldsymbol{E}$.

Hinweis:

Der Zusammenhang zwischen den Potentialen und $\boldsymbol{E}$ bzw. $\boldsymbol{B}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\
\boldsymbol{B} &= \operatorname{rot} \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

Die Lorenz-Eichung ist definiert als

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$