**LMU München**

**WS 2010/2011**

**Lehrstuhl für Theoretische Nanophysik**
Dr. A. Weichselbaum
Dr. F. Heidrich-Meisner

Abgabe: 22.12.2010, 10:15h

# 9. Übungsblatt Theoretische Physik im Querschnitt

16.12.2010

## 1: Metallkugel in externem Feld

Eine Metallkugel mit Radius $R$ wird in ein konstantes externes elektrisches Feld $\boldsymbol{E}^{ext} = E_0 \boldsymbol{e}_z$ gesetzt, das zu einem externen Potential $\phi^{ext}$ führt. Auf der Kugel seien Oberflächenladungen mit der Flächenladungsdichte $\sigma(\theta, \varphi)$ vorhanden, die einen zusätzlichen Beitrag zum Gesamtpotential induziert. Das Gesamtpotential $\phi$ der Kugel soll als null angenommen werden, d.h. $\phi(\boldsymbol{r}) = 0$ für $|\boldsymbol{r}| < R$.

a. Verifizieren Sie, dass das Potential des externen Feldes als $\phi^{ext}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{E}^{ext} \cdot \boldsymbol{r}$ geschrieben werden kann.

b. Welches sind die Randbedingungen an das gesamte Potential (externes Feld plus Kugel) bei $|\boldsymbol{r}| = R$ und $|\boldsymbol{r}| \to \infty$? Wie lautet die Differentialgleichung, der das Potential genügt?

c. Der allgemeine Ansatz für Lösungen der Laplace-Gleichung für axialsymmetrische Probleme lautet

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta),$$

wobei $P_l$ Legendre-Polynome sind (d.h. $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, etc.). Verwenden Sie diesen Ansatz und die in Teilaufgabe b) aufgestellten Randbedingungen, um das Gesamtpotential $\phi(\boldsymbol{r})$ im Bereich $r \geq R$ zu bestimmen.

d. Zeigen Sie, dass die influenzierte Oberflächenladungsdichte auf der Kugel, $\sigma = \epsilon_0 E_n$, folgende Form hat ($E_n$ ist die Feldkomponente senkrecht zur Kugeloberfläche):

$$\sigma(\theta, \varphi) = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta$$

e. Berechnen Sie die gesamte influenzierte Ladung.

## 2: Bildladungen

Gegeben sei eine geerdete metallische Kugel (Radius $R$) mit dem Mittelpunkt am Ort $r = 0$. Am Punkt $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ (mit $r_0 > R$) befinde sich eine Ladung $q$. Es sollen die elektrostatischen

Eigenschaften dieser Anordnung mit der Methode der Bildladungen untersucht werden. Dabei werden bekanntlich anstelle der Felder, die von einer influenzierten Ladungsdichte verursacht werden, die (identischen) Felder betrachtet, welche durch eine oder mehrere punktförmige Bildladungen verursacht werden.

a. Man setze eine Bildladung $q'$ am Ort $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0'$ an. Was folgt allein aus Symmetriegründen für die Richtung des Vektors $\boldsymbol{r}_0'$? Geben Sie das aus diesem Ansatz folgende Potential $\phi(\boldsymbol{r})$ für den Bereich $r > R$ an als Funktion von $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_0'$, $q$ und $q'$.

b. Welche Randbedingung muss das Potential erfüllen? Bestimmen Sie daraus die Ladung $q'$ und den Vektor $\boldsymbol{r}_0'$. Geben Sie das Potential als Funktion von $\boldsymbol{r}_0$ und $q$ an.

   *Zur Kontrolle:*

$$q' = -q\sqrt{\frac{r_0'}{r_0}} \quad \text{und} \quad r_0' = \frac{R^2}{r_0}.$$

c. Bestimmen Sie das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ für $r > R$ als Funktion von $\boldsymbol{r}_0'$ und $q$, und bestimmen Sie den Anteil des Feldes der von der Ladung $q$ herrührt und den Anteil, der von der Influenzladungsdichte $\sigma'$ herrührt.

d. Zeigen Sie, dass die Kraft $\boldsymbol{K}$ auf die Ladung $q$ gegeben ist durch

$$\boldsymbol{K} = -\frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}_0'}{(r_0^2 - R^2)^2}$$

e. Bestimmen Sie das elektrische Feld an der Oberfläche der Kugel als Funktion von $\boldsymbol{r}_0'$ und $q$.

f. Bestimmen Sie die influenzierte Ladungsdichte $\sigma'(\boldsymbol{r}')$ auf der Kugel als Funktion des Ortes, und skizzieren Sie die Winkelabhängigkeit.

g. Zeigen Sie, dass die auf der Kugel influenzierte Gesamtladung $Q'$ gleich der Ladung $q'$ ist. Bestimmen Sie das influenzierte Dipolmoment $\boldsymbol{p}'$ bezüglich des Mittelpunktes.

h. Anstelle der geerdeten Kugel werde nun eine isolierte Kugel mit der Ladung $Q$ betrachtet.

   Geben Sie das Potential an. Inwiefern kann dafür das Superpositionsprinzip ausgenutzt werden?

### 3: Dipolmoment des HCl-Moleküls

In einem vereinfachten Modell entsteht ein Salzsäure-Molekül (HCl) durch Verbindung eines Wasserstoff-Atoms mit einem Chlor-Atom ($Z = 17$), wobei das H-Atom ein Elektron an das Cl-Atom abgibt. Die 18 Elektronen des Cl-Ions bilden eine näherungsweise sphärische Wolke um den Cl-Kern. Die beiden Kerne sind 1.28 Å voneinander entfernt. Das Dipolmoment des oben beschriebenen Moleküls soll berechnet und mit dem experimentellen Wert von $d = 3.4 \times 10^{-28}$ Coulomb cm verglichen werden.

a. Zeigen Sie, dass das Dipolmoment einer Ladungsverteilung genau dann vom Koordinatenursprung unabhängig ist, wenn die Gesamtladung verschwindet.

b. Drücken Sie das Dipolmoment einer Summe von Ladungsverteilungen

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_1(\boldsymbol{r}) + \rho_2(\boldsymbol{r})$$

durch die jeweiligen Gesamtladungen $Q_{1,2}(\neq 0)$ und deren Ladungsschwerpunkte aus.

c. Berechnen Sie das Dipolmoment des obigen Moleküls (Elementarladung: $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb). Verwenden Sie hierzu die Verallgemeinerung der Aussauge aus Teilaufgabe (b) auf drei verschiedene Ladungsverteilungen, nämlich die der beiden Kerne und der Elektronenwolke.

d. Wie weit muss der Schwerpunkt negativer Ladung vom Cl-Kern in Richtung zum Proton verschoeben werden, damit das Dipolmoment in unserem Modell den gemessenen Wert annimmt?

## 4: Maxwell-Gleichungen an Oberflächen

Welche Randbedingungen folgen aus den Maxwellschen Gleichungen für das Verhalten der Tangentialkomponente von $\boldsymbol{E}$ an Oberflächen?

*Hinweis:* Verwenden Sie den Satz von Stokes.