LMU München

WS 2010/2011

Lehrstuhl für Theoretische Nanophysik
Dr. A. Weichselbaum
Dr. F. Heidrich-Meisner

Abgabe: 25.1.2011, 10:15h

12. Übungsblatt Theoretische Physik im Querschnitt

19.1.2011

1: Freies quantenmechanisches Teilchen und Ehrenfest-Theorem

Das Ehrenfest-Theorem für Observable, die nicht explizit von der Zeit abhängen, lautet

$$\frac{\mathrm{d}\langle A\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}\langle [H, A]\rangle. \tag{1}$$

Spitze Klammern stehen für den Erwartungswert in einem quantenmechanischen Zustand. Wir betrachten ein freies Teilchen der Masse m, das sich nur entlang der x-Achse bewegen kann.

a. Verwenden Sie Gleichung (1), um die Erwartungswerte von p und p^2 als Funktion von t zu bestimmen (die Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ seien vorgegeben). Was folgt daraus für die Zeitabhängigkeit der Impulsunschärfe

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}?$$

b. Betrachten Sie nun die gemischte Fluktuationsgröße

$$\kappa = \langle (xp + px)\rangle - 2\langle x\rangle\langle p\rangle,$$

welche die Korrelation zwischen x und p beschreibt. Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit von κ für das freie Teilchen mit Hilfe von Gleichung (1).

Zur Kontrolle: $\kappa = \kappa_0 + \frac{2(\Delta p)_0^2}{m} t$

c. Berechnen Sie schließlich auch die Zeitabhängigkeit des Erwartungswertes von x^2. Drücken Sie die Ortsunschärfe

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

zur Zeit t durch Δx, Δp und κ zur Zeit $t = 0$ aus. Was erhält man für große Zeiten?

2: Bewegung im Potentialtopf

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem unendlich tiefen Potentialtopf der Breite $2a$, der durch das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben wird.

a. Bestimmen Sie die normierte Wellenfunktionen $\phi_0(x)$ des Grundzustands und $\phi_1(x)$ des ersten angeregten Zustands sowie die zugehörigen Eigenenergien E_0 bzw. E_1.

b. Berechnen Sie für den Zustand

$$\phi(x) = \phi_0(x)\cos\alpha + \phi_1(x)\sin\alpha$$

die Ortsaufenthaltnswahrscheinlichkeit in der linken Hälfte des Potentials $(-a < x < 0)$ als Funktion des Parameters α. Für welchen Wert von α ist die Wahrscheinlichkeit am größten, das Teilchen in der linken Potentialhälfte zu finden?

c. Es soll nun die Dynamik des Zustands untersucht werden, der zur Zeit $t = 0$ durch

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_0(x) - \phi_1(x)]$$

beschrieben wird. Wie lautet die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ für beliebige Zeiten? Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit $\langle x(t)\rangle$ des Ortserwartungwertes.

Hinweis: Gelegentlich können Symmetriebetrachtungen Rechenarbeit ersparen.

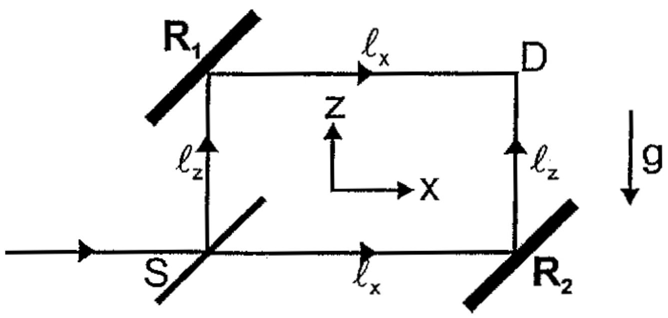
Nützliche Formeln:

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

$$\int \mathrm{d}x x\sin(ax) = \frac{sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}$$

3: Interferenz im Schwerefeld

Ein kohärenter Teilchenstrahl aus (unabhängigen) Teilchen der Masse m und Energie E läuft durch einen Strahlteiler S bei $(x, z) = (0, 0)$ und wird in 2 Teilstrahlen geteilt (siehe Figur).



- Der erste Strahl führt von S senkrecht nach oben zu einem Reflektor R_1 an der Stelle $(x, z) = (0, l_z)$ und von dort horizontal weiter zu einem Detektor D an der Stelle $(x, z) = (l_x, l_z)$. Diesen Weg bezeichnen wir mit W_1.

- Der zweite Strahl führt von S horizontal zu einem Reflektor R_2 an der Stelle $(x, z) = (l_x, 0)$ und anschließend senkrecht nach oben zum selben Detektor D. Diesen Weg bezeichnen wir mit W_2.

Das Gravitationsfeld der Erde führt zu einer Phasenverschiebung zwischen den beiden Teilstrahlen am Detektor D, die sowohl von l_x als auch von l_z abhängt.

a. Berechnen Sie den Phasenunterschied $\Delta\varphi$ zwischen den beiden Strahlen an der Stelle D für $E > mgl_z$ unter der Annahme, dass die Wellenfunktion eines Teilchens gegeben ist durch (WKB-Näherung)

$$\psi(\boldsymbol{x}) = A \exp\left(i \int^{\boldsymbol{x}} \frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})}{\hbar} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \right).$$

Hieraus folgt der Phasenunterschied

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\hbar} \int\limits_{W_1} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \frac{1}{\hbar} \int\limits_{W_2} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

wobei $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})$ der klassisch berechnete Teilchenimpuls eines Teilchens der Masse m und Energie E im Schwerefeld ist.

Hilfe: Die Integrale entlang der vertikalen Wege brauchen nicht ausgewertet zu werden.

b. Nehmen wir nun an, dass $E \gg mgl_z$ gilt. Zeigen Sie, dass dann der Phasenunterschied $\Delta\varphi$ proportional zur Fläche $A = l_x l_z$ ist, die von den beiden Strahlen eingeschlossen wird.

c. Benutzen Sie dieses Resultat, um den Abstand zwischen den Interferenz-Maxima zu berechnen, wenn wir l_z konstant halten und l_x variieren.