LMU München

WS 2010/2011

Lehrstuhl für Theoretische Nanophysik
Dr. A. Weichselbaum
Dr. F. Heidrich-Meisner

Abgabe: 8.2.2011, 10:15h

14. Übungsblatt Theoretische Physik im Querschnitt

3.2.2011

1: Harmonischer Oszillator

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m bewege sich in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

a. Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung in Ortsdarstellung auf. Welchen Randbedingungen müssen die Wellenfunktionen genügen? Begründen Sie diese Bedingungen.

b. Skizzieren Sie die Wellenfunktionen der 4 niedrigsten Eigenzustände des gewöhnlichen, eindimensionalen Oszillators ohne Wand. Welche diskrete Symmetrie hat dieses System, und wie schlägt sie sich in den Wellenfunktionen nieder? Was sind die Energieeigenwerte?

c. Bestimmen Sie mit Hilfe von a) und b) das vollständige Spektrum des Hamilton-Operators für den Oszillator mit Wand ohne detaillierte Rechnung.

d. Geben Sie die normierte Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(x)$ und die Grundzustandsenergie für den Oszillator mit Wand an.

Hinweis: $\int_0^\infty \mathrm{d}x x^2 e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

2: Eindimensionales, periodisches δ-Potential

Ein Teilchen der Masse m bewege sich entlang der x-Achse in einer periodischen Anordnung (Periode d) von anziehenden δ-Potentialen:

$$V(x) = \tilde{V} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(x - \nu d)$$

Der Parameter $\tilde{V}$ beschreibt die Stärke und das Vorzeichen der δ-Potentiale.

a. Welches Vorzeichen von $\tilde{V}$ entspricht einem anziehenden Potential? Welche physikalische Dimension hat der Parameter $\tilde{V}$?

b. Leiten Sie aus der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung die folgende Anschlussbedingung für die Ableitungen $\Psi'(x)$ der Wellenfunktion $\Psi(x)$ an der Stelle eines δ-Potentials der Stärke $\tilde{V}$ und Position a her:

$$\Psi'(a + 0^+) - \Psi'(a + 0^-) = \frac{2m}{\hbar^2} \tilde{V} \Psi(a).$$

Das Symbol 0^+ bezeichnet hier eine infinitesimal kleine, positive Länge.

c. Die Grundzustandswellenfunktion des Teilchens ist nullstellenfrei, periodisch und kann reell gewählt werden. Begründen Sie kurz diese Aussagen.

d. Die Grundzustandswellenfunktion hat für $\tilde{V} < 0$ im offenen Intervall zwischen benachbarten δ-Potentialen die Form

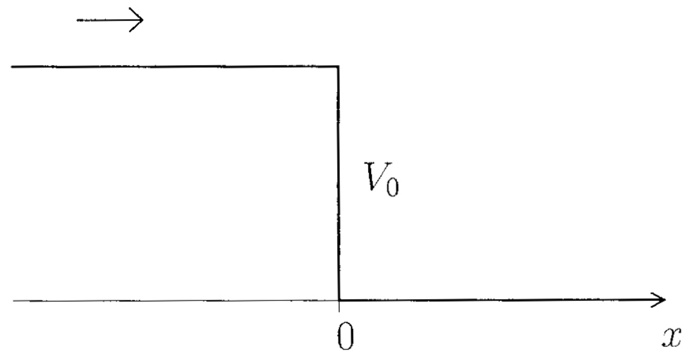
$$\Psi(x) = A_0 \left[\exp(\lambda x) + \exp(-\lambda x)\right].$$

Berechnen Sie die Grundzustandsenergie als Funktion von λ.

e. Skizzieren Sie die Abhängigkeit der Wellenfunktion des Grundzustandes von der Position x im Bereich $-d < x < +d$.

3: Potentialstufe - abwärts

Ein nicht-relativistisches quantenmechanisches Teilchen (Masse m) falle von links ($x < 0$) auf die absteigende Potentialstufe der Tiefe V_0 (siehe Zeichnung). Die kinetische Energie des einfallenden Teilchens sei K. Das Problem ist eindimensional.



a. Stellen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung auf. Geben Sie den Lösungsansatz auf beiden Seiten der Stufe an, und begründen Sie ihn.

b. Bestimmen Sie explizit die Lösung zur Energie $E = K + V_0$. Normieren Sie die Amplitude der einfallenden Welle auf 1.

c. Wie hängt der Reflexionskoeffizient dieser Potentialstufe bei festgehaltenem K von V_0 ab? Betrachten Sie insbesondere die Grenzfälle $V_0/K \ll 1$ und $V_0/K \gg 1$. Vergleichen Sie mit dem Verhalten eines klassischen Teilchens, und erklären Sie das quantenmechanische Ergebnis qualitativ.