LMU München

Lehrstuhl für Theoretische Nanophysik
Dr. A. Weichselbaum
Dr. F. Heidrich-Meisner

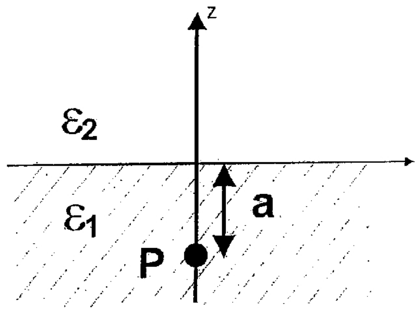
WS 2010/2011

Abgabe (freiwillig): 10.2.2011, 10:15h

15. Übungsblatt Theoretische Physik im Querschnitt

Besprechung: 15.2.2011

1: Ladung vor Dielektrikum - Elektrodynamik



Eine Ladung e befinde sich im Punkt $P = (0, 0, -a)$ in einer Entfernung a von der Grenzfläche zweier verschiedener (dreidimensionaler) dielektrischer homogener Medien mit relativen dielektrischen Permeabilitäten ϵ_1 bzw. ϵ_2 (s. Figur). Die Grenzfläche ist durch die Gleichung $z = 0$ beschrieben. Die elektrischen Potentiale in beiden Medien, ϕ_1 bzw. ϕ_2, erfüllen wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes die Bedingung $\phi_1(x, y, 0) = \phi_2(x, y, 0)$ für alle Punkte $(x, y, 0)$ an der Grenzfläche.

a. Geben Sie die aus der Stetigkeit der Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung folgende Grenzbedingung für die elektrischen Potential ϕ_1 und ϕ_2 an.

b. Benutzen Sie die Methode der Spiegelladung und die zwei Grenzbedingungen für die Potentiale, um die elektrischen Potentiale ϕ_1 und ϕ_2 zu bestimmen.

   Hinweis: Suchen Sie das Potential im Medium 1 als eines, das von zwei Punktladungen e und e', die an den Punkten $P = (0, 0, -a)$ bzw. $P' = (0, 0, a)$ lokalisiert sind, erzeugt wird. Suchen Sie dagegen das Potential im Medium 2 als eines, das von einer einzigen Punktladung e'' im Punkt P erzeugt wird. Bestimmen Sie e, e', e''.

   Zur Kontrolle: Für $\epsilon_2 = 1$ ist $e' = e(\epsilon_1 - 1)/(\epsilon_1 + 1)$, $e'' = 2e/(\epsilon_1 + 1)$.

c. Berechnen Sie die Kraft, die auf die Ladung e im Punkt P wirkt, und diskutieren Sie, welchen physikalischen Effekt sie hervorruft, wenn das Medium 1 Luft ist ($\epsilon_1 = 1$) und $\epsilon_2 > 1$ gilt.

d. Diskutieren Sie den Fall $\epsilon_2 \to \infty$. Welcher physikalischen Situation entspricht dies?

2: Der Einfluss der Kernausdehnung auf wasserstoffähnliche Zustände

Betrachtet werde ein Atom mit raumfestem Kern (mit der Kernladung Z_e) und einem Elektron (mit der Masse m_e und Ladung $-e$); die potentielle Energie ist

$$V_0 = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Ungestörtes Problem: Im *ungestörten* Fall eines *punktförmigen* Kerns wird der Grundzustand des Elektrons durch die Wellenfunktion

$$\psi_0(\boldsymbol{r}) = Ne^{-r/\gamma_0}, \qquad \gamma_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Zm_e e^2}, \qquad N = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma_0^3}} \tag{1}$$

mit der Normierungskonstanten N und dem Bohrschen Radius a_0 beschrieben.

a. Bestimmen Sie aus der Schrödinger-Gleichung die Grundzustandsenergie E_0.

   Hinweise:

   $$\text{Radialanteil des Laplace-Operators: } \Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}.$$

   $$\text{Ein nützliches Integral: } \int_0^\infty x^n e^{-\mu x}\mathrm{d}x = \frac{n!}{\mu^{n+1}}.$$

Störungstheorie: Der Kern soll jetzt als homogen geladene Kugel mit dem Radius R angenommen werden. Im Fall des *ausgedehnten* Kerns ist die potentielle Energie

$$V(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} \frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R} & \text{für } r \leq R \\ -\frac{1}{r} & \text{für } r \geq R \end{cases}$$

b. Skizzieren Sie das Potential als Funktion des Abstandes vom Kernmittelpunkt.

c. Die durch die Kernausdehnung verursachte Korrektur der Grundzustandsenergie ist in Störungstheorie erster Ordnung gegeben durch

   $$\Delta E_0 = \langle\psi_0|\,[V(r) - V_0(r)]\,|\psi_0\rangle.$$

   Zeigen Sie, dass man

   $$\Delta E_0 = \frac{4}{5}Z^2|E_0|\left(\frac{R}{a_0}\right)^2$$

   erhält.

   Hinweis: Weil $R \ll \gamma_0$ gilt, kann (soll) bei der Berechnung des Integrals die Exponentialfunktion in der in Gleichung (1) angegebenen Wellenfunktion durch eine Konstante genähert werden.

3: Ableitung der Eigenenergien

Der Hamilton-Operator $\hat{H}(\lambda)$ eines Teilchens soll von einem Parameter λ abhängen. Die Eigenzustandsvektoren $|n\rangle_\lambda$ und die Energien $E_n(\lambda)$ sind daher ebenfalls eine Funktion dieses Parameters.

a. Beweisen Sie das Hellmann-Feynman-Theorem

$$\frac{\mathrm{d}E_n}{\mathrm{d}\lambda} = \rangle n|_\lambda \frac{\mathrm{d}\hat{H}}{\mathrm{d}\lambda} |n\rangle_\lambda .$$

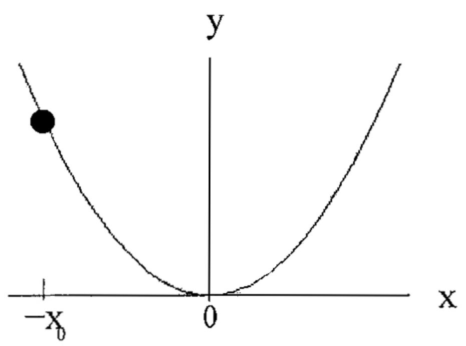
Als Beispiel betrachten wir ein geladenes Teilchen in einem Potential, das unter Rauminversion $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ invariant ist. Das Teilchen werde durch den Hamilton-Operator $\hat{H}_0$ beschrieben. Zusätzlich werde ein homogenes elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$ eingeschaltet.

b. Geben Sie den Hamilton-Operator $\hat{H}_1$ an, welcher die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Feld $\boldsymbol{E}$ beschreibt.

c. Zeigen Sie unter Verwendung des Hellmann-Feynman-Theorems und von Symmetrieargumenten, dass der lineare Stark-Effekt für alle nicht-entarteten Eigenzustände von $\hat{H}_0$ verschwindet. Das heißt, die Energien dieser Eigenzustände des Teilchens ändern sich nicht linear, sondern erst in höherer Ordnung des elektrischen Feldes.

4: Masse auf der Achterbahn

Auf einer Achterbahn rollt ein Wagen auf einer parabelförmigen Bahn in die Tiefe. Wir wollen ihn durch ein punktförmiges Teilchen der Masse m beschreiben, das sich reibungsfrei auf der Kurve $y = ax^2$ im Potential mgy der Schwerkraft bewegt(siehe Skizze). Es soll bei $-x_0 < 0$ aus der Ruhelage heraus starten und nach der Zeit T das Minimum $x = 0$ der Bahn erreicht haben. Um die Rechnung zu vereinfachen, untersuchen wir nur den Fall $x_0 = 1/(2a)$.



a. Welche Erhaltungsgröße gibt es bei diesem Problem? Geben Sie diese an.

b. Berechnen Sie die Geschwindigkeit am Minimum $x = 0$ der Bahn.

c. Welche Wegstrecke hat das Teilchen zurückgelegt, wenn es nach der Zeit T das Minimum erreicht hat?

d. Berechnen Sie diese Zeit T.

Hinweis: Sie dürfen folgende Integrale verwenden:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}}\mathrm{d}z \simeq 1.91, \quad \int_0^1 \sqrt{1+z^2}\mathrm{d}z \simeq 1.15$$

5: Thermodynamik des Gummifadens

Ein einfaches, phänomenologisches Modell des Gummifadens beruht auf dem folgenden Ansatz für die Entropie S als Funktion der inneren Energie U und der Länge L des Fadens:

$$S = S_0 + cL_0 \ln\left(\frac{U}{U_0}\right) - \frac{b}{2(L_1 - L_0)}(L - L_0)^2.$$

Dabei sind L_0 die Ruhelänge des Gummifadens, L_1 die elastische Grenzlänge ($L_0 \leq L \leq L_1$), S_0, U_0, c und b positive Konstanten.

a. Wie lauten die thermische ($U = U(T, L)$) und die mechanische ($\sigma = \sigma(T, L)$) Zustandsgleichung?

   Hinweis: Gehen Sie aus von
   $$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U - \frac{\sigma}{T}\mathrm{d}L$$
   (σ = Fadenspannung), und bestimmen Sie $U(T, L)$ bzw. $\sigma(T, L)$.

   Zur Kontrolle: $U = \alpha T$, $\sigma = T(\beta L + \gamma)$ mit gewissen Konstanten α, β, γ.

b. Der Gummifaden werde *isotherm* ausgedehnt. Welche Arbeit ist erforderlich für eine infinitesimale Ausdehnung des Fadens um $(d)L$? Wo bleibt die investierte Energie?

c. Der Gummifaden werden nun *adiabatisch* ausgedehnt um $\mathrm{d}L$. Diskutieren Sie wiederum den Energiesatz. Wie verändert sich die Temperatur des Fadens?