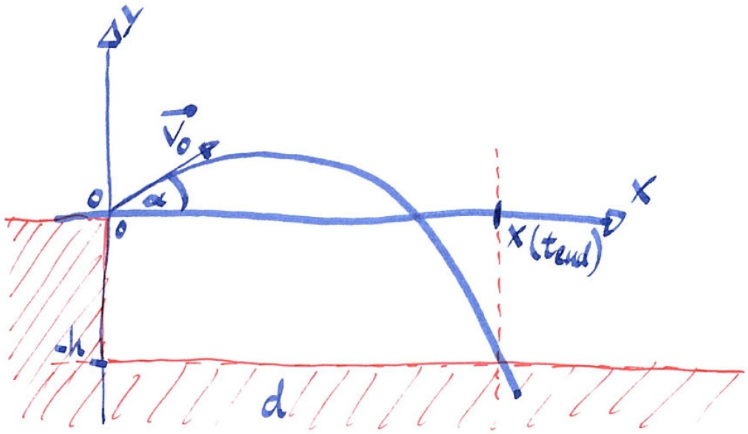
Musterlösung Nachklausur E1

Aufgabe 1

a)



$$y(t) = v_\perp t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{1}$$

$$x(t) = v_\parallel t \tag{2}$$

mit $v_\perp = v_y = v_0 \sin(\alpha)$ und $v_\parallel = v_x = v_0 \cos(\alpha)$

b) bei t_{end} gilt: $y(t_{end}) = -h$, aus a) $y(t)$ einsetzen und nach t_{end} auflösen:

$$t_{end;1,2} = \frac{v_o \sin\alpha \mp \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} \tag{3}$$

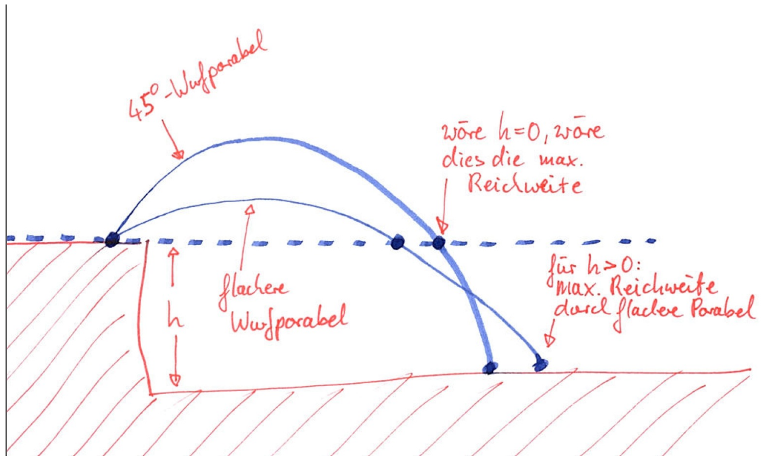
$t_{end,1} < 0$; $t_{end,2}$ ist die gesuchte Lösung

c) Es sei $\beta(t)$ der Flugbahnwinkel der Kugel definiert durch: $\tan\beta(t) = \frac{v_\perp(t)}{v_\parallel}$. Dann ist der Aufschlagswinkel der Kugel gegeben durch $\beta(t_{end})$. Mit $v_\perp(t_{end}) = v_{\perp,0} - g t_{end}$ und t_{end} aus b) bekommen wir::

$$\tan\beta(t) = -\tan\alpha \left(\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\alpha}} \right) \tag{4}$$

Und somit ist $\beta(t_{end}) = -\arctan\left[(\tan\alpha) \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\alpha}} \right]$

d) Für $h > 0$ muss $\alpha < 45^0$ sein, um die maximale Entfernung zu erreichen.


45°-Wurfparabel
wäre h=0, wäre
dies die max.
Reichweite
flachere
Wurfparabel
h
für h>0:
max. Reichweite
durch flachere Parabel

Aufgabe 2

a) $v_\perp = gt$ wobei man t aus $h = \frac{1}{2}gt^2$ erhält und damit $v_\perp = \sqrt{2gh} = 3,16\frac{m}{s}$, indem man $h = 0,5m$ und $g = 10\frac{m}{s^2}$ einsetzt.

b) Verwende Impulserhaltung mit $|\Delta p| = |2p|$ und nähere $\frac{dp}{dt} \approx |\Delta p|\frac{N}{t}$. Mit $\frac{dp}{dt} = F = Mg$ ergibt sich die gesuchte Masse in der Waagschale:

$$M = \frac{2mv_\perp}{g} \cdot \frac{100}{s} = 31,6g \tag{5}$$

Aufgabe 3

a) aus Gravitationsgesetz:

$$|F| = \frac{M_{Mars} m}{r_{Mars}^2} G = m g_{Mars} \tag{6}$$

Durch Auflösen nach M_{Mars} ergibt sich:

$$M_{Mars} = \frac{g_{Mars}}{G} r_{Mars}^2 = 6,4 \cdot 10^{23} kg \tag{7}$$

b) Durch Gleichsetzen der Ausdrücke für die potentielle Energie pro Masse $\frac{U}{m} = \frac{M_{Mars} G}{r}$ und der kinetischen Energie pro Masse $\frac{E_{kin}}{m} = \frac{1}{2} v^2$ ergibt sich die gesuchte Fluchtgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2 M_{Mars} G}{r}} = 5,0 \cdot 10^3 \frac{m}{s} \tag{8}$$

c) verwende $F_Z = F_G$, wobei $F_G = \frac{mM}{r^2} G$ und $F_Z = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = m \left(\frac{2\pi}{T_{Umlauf}} \right)^2 r$ (mit Marsmasse m, Sonnenmasse M und dem Radius der Planetenbahn r genähert durch die große Halbachse), woraus sich dann der Ausdruck für die gesuchte Sonnenmasse ergibt:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G T_{Umlauf}^2} = 1,99 \cdot 10^{30} kg \tag{9}$$

d) Zentralkraftfeld $\rightarrow$ Drehimpuls ist erhalten

e) Präzession: Gezeitenkräfte üben ein Drehmoment auf den nicht ganz kugelförmigen Planeten aus, da die Drehachse gekippt ist.

Aufgabe 4

a) Annahme: Drehmomente durch Schwerpunkt und durch Seil kompensieren sich.
$|D_{SP}| = |\vec{r} \times \vec{F_G}| = \frac{l}{2} mg \cos\alpha$
$|D_{Seil}| = |\vec{r} \times \vec{F_Z}| = l F_Z \sin\alpha$
Auflösen nach F_Z liefert dann:

$$F_Z = \frac{mg}{2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 562,5N \tag{10}$$

b) Potentielle Energie im SP $U = mgh = 150kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 2m = 3000J$

c) Trägheitsmoment berechnet sich nach folgender Formel:

$$I = \int r_\perp^2 \rho(r) dV = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_0^L z'^2 \frac{m}{LA} dx' dy' dz' \tag{11}$$

wobei wir eine homogene Massenverteilung angenommen haben $\rho = \frac{m}{LA}$.

$$I = \frac{m}{LA} a^2 \int_0^L z'^2 dz' = \frac{m}{L} \int_0^L z'^2 dz' = \frac{mL^2}{3} = 1250kg\ m^2 \tag{12}$$

d) Verwende $E_{Rot} = U_{pot}$, wobei $E_{Rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$. Daraus ergibt sich die gesuchte Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\frac{2U_{pot}}{I}} = 2,2\frac{1}{s} = 125^0 \frac{1}{s} \tag{13}$$

Aufgabe 5

a) Drehmoment ist gegeben als $D_{ges} = I\ddot{\varphi} = -(D_F + D)$, wobei $D_r > 0$ und $\gamma > 0$ gilt. ($\gamma <$ ist legitim, muss dann aber beibehalten werden.).

$$I\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + D_r\varphi = 0 \tag{14}$$

b) Ansatz einsetzen führt zunächst auf folgende Gleichung:

$$I\lambda^2 + 2\gamma\lambda + D_r = 0 \tag{15}$$

woraus sich λ berechen lässt:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - ID_r}}{I} \tag{16}$$

c) reibungsfreier Fall: $\omega^2 = \frac{D_r}{I}$
verwende $I = 2(I_{Kugel} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2) = 2M\left(\frac{2}{5}R^2 + \frac{L^2}{4}\right)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D_r}} = 2\pi\sqrt{2M\left(\frac{2}{5}R^2 + \frac{L^2}{4}\right)\frac{1}{D_r}} \tag{17}$$

d) Verwende $T \sim \frac{1}{\sqrt{D_r}} \rightarrow T \sim \sqrt{l}$
Für die Torsion gilt: $D_r \sim \frac{1}{l}$ mit der Drahtlänge l. $\rightarrow$ Schwingungsdauer verlängert sich um $\sqrt{2}$.

e) Schermodul (alternativ: Torsionsmodul, Schubmodul, G-Modul)

f) $\gamma = \frac{D_F}{2\dot{\varphi}} = \frac{F_R \frac{L}{2} 2}{2\dot{\varphi}} = \frac{6L\eta\pi R v_T}{2\dot{\varphi}} = \frac{3}{2}L^2 R\pi\eta$
wobei man $v_T = \frac{L}{2}\dot{\varphi}$ verwendet hat.

Aufgabe 6

a) $v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{Q}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

b) 1. statischer Druck : $p_{stat,1} = \rho g h_1$
2. Gesamtdruck = statischer + dynamischer Druck:
$p_{ges,2} = p_{stat,2} + p_{dyn,2} = \rho g h_2$

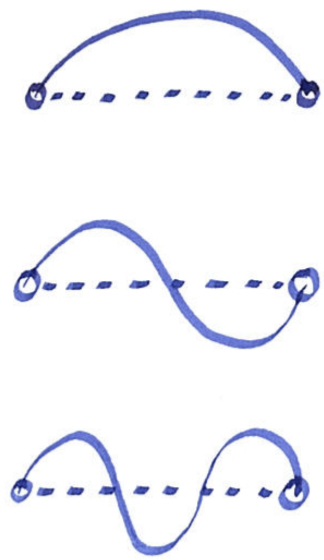
c) Da es sich um eine ideale Flüssigkeit handelt, muss der Gesamtdruck $p_{ges} = p_{stat} + p_{dyn}$ an allen Stellen innerhalb des Rohres gleich sein. Es gilt also:
$p_{ges,1} = p_{ges,2}$
$\Rightarrow p_{stat,1} + p_{dyn,1} = p_{ges,2}$
$\Rightarrow \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_2$
$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\Delta h}$

$$Q = A_1 v_1 = \pi \frac{(0,1m)^2}{4} \sqrt{2g\Delta h} = 0,0156 \frac{m^3}{s} \tag{18}$$

$\Rightarrow$ Q ist unabhängig von D

Aufgabe 7

a)



b) ${v_{ph}}^2 = \frac{F}{\mu}$, wobei $\mu = \rho A = \rho\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$. Daraus ergibt sich dann der Ausdruck für die Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{4mg}{\rho\pi D^2}} = 252,28\frac{m}{s} \tag{19}$$

c) $f = \frac{v_{ph}}{\lambda} = \frac{v_{ph}}{\frac{2}{3}L} = 1261,4Hz$

d) $A_0 \sin\left(x\frac{3\pi}{L}\right)\sin\left(\omega t\right)$

e) Verwende Wellengleichung: $\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2A}{dt^2}$

Ansatz $A(x,t) = e^{-\frac{(x-ct)^2}{\sigma^2}}$ verwenden und Ableiten:

$\frac{dA}{dx} = e^{-\frac{(x-ct)^2}{\sigma^2}}\left(-\frac{2(x-ct)}{\sigma^2}\right)$

$\frac{d^2A}{dx^2} = e^{-\frac{(x-ct)^2}{\sigma^2}}\left(-\frac{2(x-ct)^2}{\sigma^2}\right)^2 + e^{-\frac{(x-ct)^2}{\sigma^2}}\left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)$

$\frac{dA}{dt} = e^{-\frac{(x-ct)^2}{\sigma^2}}\left(-\frac{2(x-ct)}{\sigma^2}\right)(-c)$

$\frac{d^2A}{dt^2} = e^{-\frac{(x-ct)^2}{\sigma^2}}\left(-\frac{2(x-ct)}{\sigma^2}\right)c^2 + e^{-\frac{(x-ct)^2}{\sigma^2}}\left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)c^2$

Als Test in die Wellengleichung einsetzen $\Rightarrow$ q.e.d.

Bonusfragen

a) $L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

b) $R_e = \frac{\rho v d}{\eta}$ Dimensionslose Zahl, die das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften darstellt.

c) Dispersion bei Wellen: Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Frequenz
anomale Dispersion: $\frac{dn}{df} > 0 \rightarrow$ Beispiel: Kapillarwellen