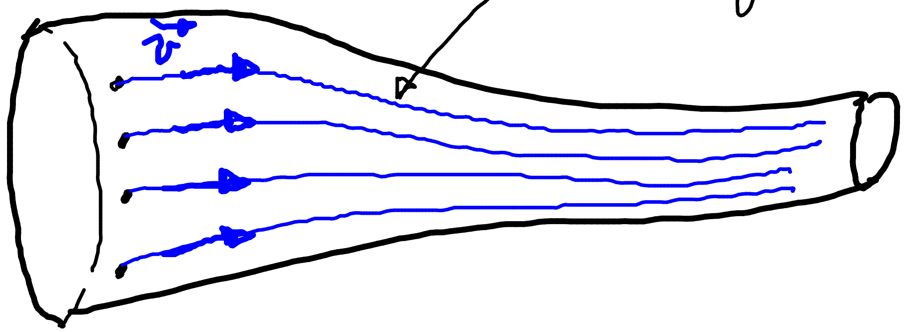
# 2.6 Hydrodynamik / Aerodynamik

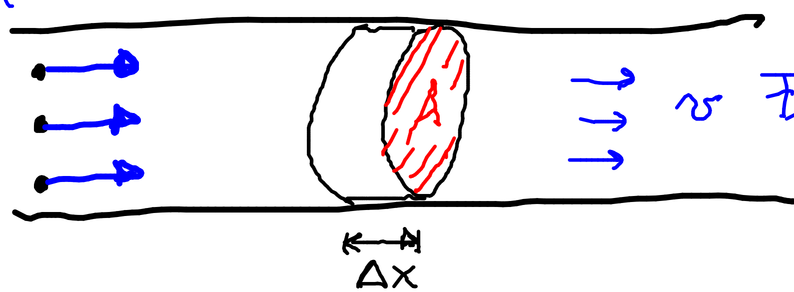
Beschreibung der Strömung von Flüssigkeiten & Gasen (Fluiden)

**Strömungsfeld**




Es genügt, alle Massenpunkte gemeinsam zu betrachten

- (Volumen-)Stromstärke




$\rightarrow$ $v$ Fließgeschwindigkeit

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

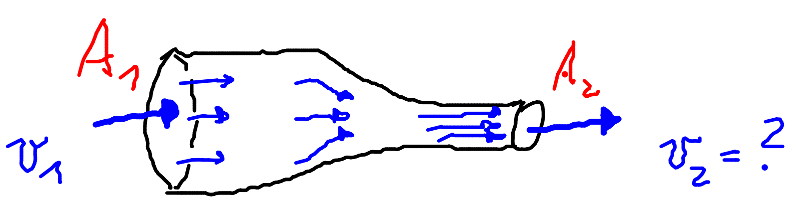
$$\Delta V = A \cdot \Delta x = A \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta t$$
$$= A \cdot v \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot v$$

- **Kontinuitätsgleichung:**

(inkompressible Flüssigkeiten)

$$\boxed{I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot v = \text{const}}$$




$$\Rightarrow I_1 = A_1 \cdot v_1 \overset{!}{=} A_2 \cdot v_2 = I_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 > v_1$$

Betrachte Energiebilanz:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2\right) = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right) > 0$$

Energieerhaltung erfordert Kompensation von $\Delta E_{kin} > 0$

$$\Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot h = \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot h$$

$$\Delta E_{pV} = F \cdot \Delta x = \underbrace{\frac{F}{A}}_{p} \cdot \underbrace{A \cdot \Delta x}_{\Delta V} = p \cdot \Delta V$$

$\Rightarrow$ $$\Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} + \Delta E_{pV} = \text{const.}$$ Energieerhaltung!

$$\frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V \cdot v^2 + \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot h + p \cdot \Delta V = \text{const.}$$

$\Rightarrow$ Bernoulli Gleichung:

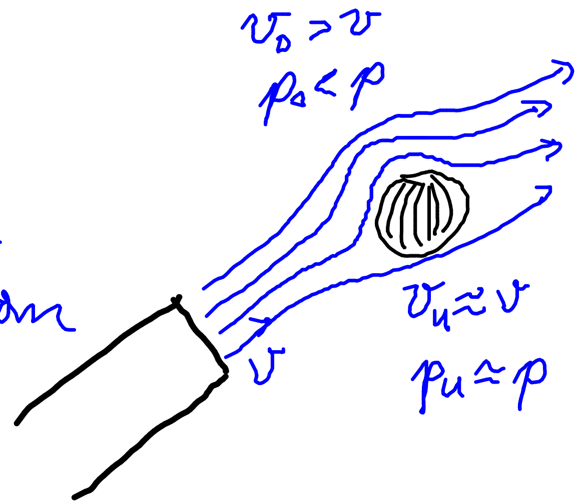
$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{2} \rho v^2}_{\text{Staudruck}} + \underbrace{\rho \cdot g h}_{\text{hydrostatischer/ Schweredruck}} + \underbrace{p}_{\text{statischer Druck}} = \text{const.}}$$

gilt streng in:
inkompressiblen
reibungsfreien
Flüssigkeiten

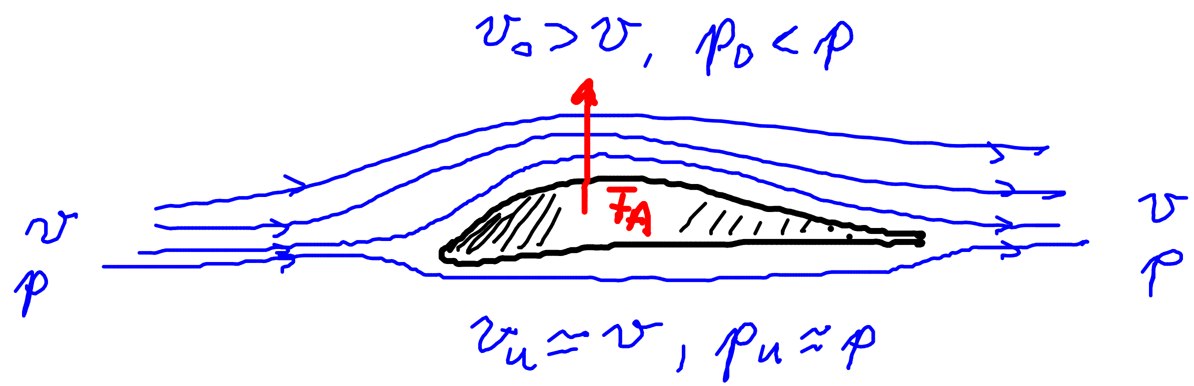
# ⇒ Hydrodynamisches Paradoxon

In Bereichen mit hoher Strömungsgeschwindigkeit ($v$) herrscht ein reduzierter statischer Druck ($p$)

- Ball im Luftstrom




- Flügel / Tragfläche:



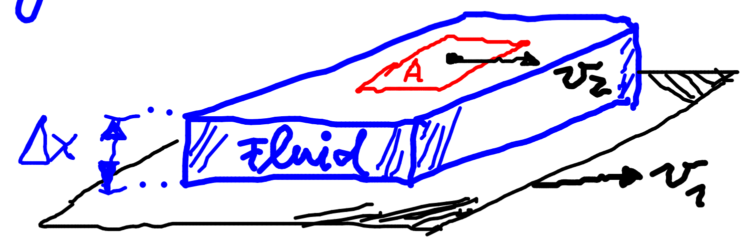

⇒ dynamische Auftriebskraft $\vec{F}_A$

# • Viskosität / Zähigkeit

Kohäsionskräfte → innere Reibung

## Reibungskraft

$$\boxed{F_R = -\eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}$$




$\Delta v = v_2 - v_1$

$\eta$: Viskosität, Einheit: $Pa \cdot s = \frac{N \cdot s}{m^2}$

- Viskosität ist temperaturabhängig
- — " — kann von $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ abhängen

falls unabhängig von $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ → Newtonsche Flüssigkeit

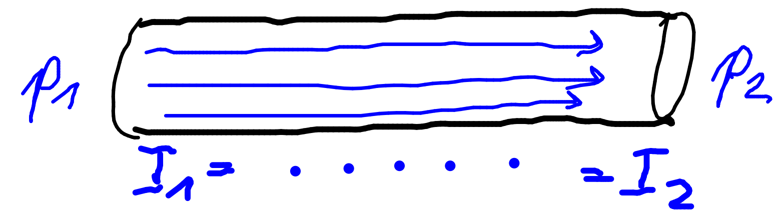
- Beispiele: Öl, Wasser, Luft, (Blut)

$\eta$: $\approx 1\,Pa \cdot s$, $10^{-3}\,Pa \cdot s$, $2 \cdot 10^{-5}\,Pa \cdot s$, $4.4 \cdot 10^{-3}\,Pa \cdot s$

- Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{F_R}{A}$ erforderlich, damit $I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \text{const.}$

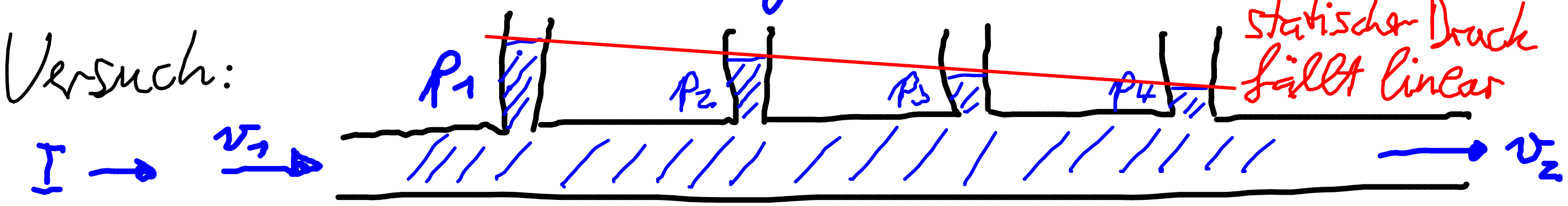
für Newtonsche Flüssigkeit:

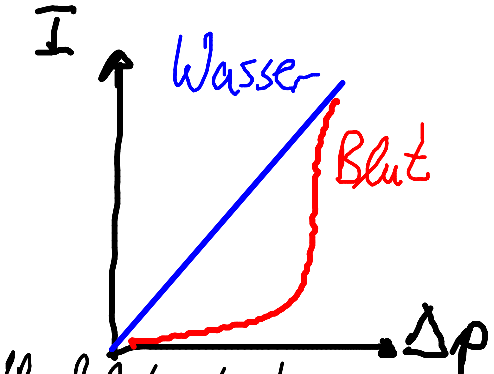
$$\boxed{\Delta p = R_s \cdot I}$$




$R_s$: Strömungswiderstand, Einheit $\frac{Ns}{m^5}$

Versuch:

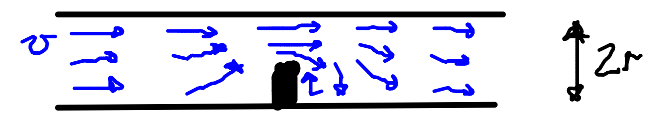



NB: Blut ist keine Newtonsche Flüssigkeit

## Strömungen

- laminare Strömung sind wirbelfrei
- turbulente —"— haben Wirbel



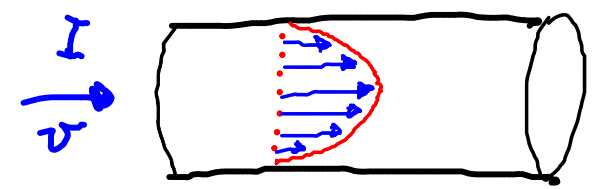

Reynoldszahl $\quad Re \sim \frac{r \cdot \rho \cdot v}{\eta}$ $\quad \begin{cases} \ll 1000 & \text{ergibt laminare Strömung} \\ \gg 1000 & \text{ergibt turbulente} \end{cases}$

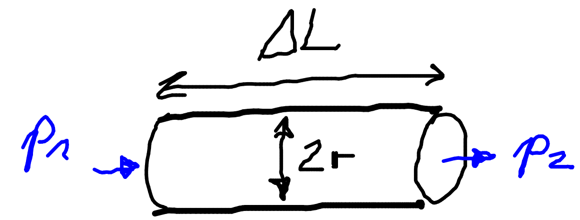
$\Rightarrow v_{krit} \approx 1000 \cdot \frac{\eta}{\rho \cdot r}$; $v > v_{krit} \Rightarrow$ Strömungswiderstand $R_s \sim v^2$ ansteigend

# laminare Strömung: Geschwindigkeitsprofil

parabelförmig

an Rohrwand ist $\vec{v} = 0$



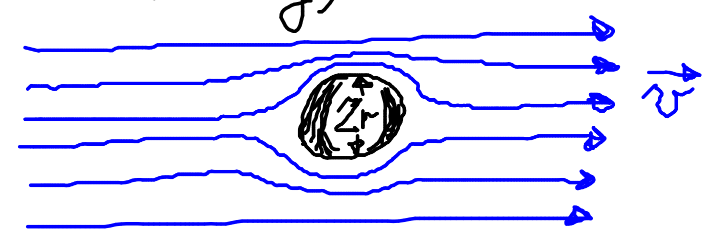

⇒ ■ **Gesetz von Hagen-Poiseuille**

$$\boxed{R_S = \frac{8\eta \cdot \Delta L}{\pi \cdot r^4}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{R_S} \cdot \Delta p = \pi \cdot \frac{r^4}{8 \cdot \eta \cdot \Delta L} \cdot \Delta p}$$

$$I \sim \Delta p, \quad I \sim \frac{1}{\eta}, \quad I \sim \frac{1}{\Delta L}, \quad I \sim r^4$$

■ **Stokesche Reibung** (häufigster Fall bei viskoser Reibung)

$$\boxed{\vec{F}_R = -6\pi \cdot \eta \cdot \vec{v} \cdot r}$$




Beispiel: Sinken einer Kugel $m_K = \rho_K \cdot V$ in Flüssigkeit $\rho_{Fl}$

$\rightarrow \quad F_R = F_G - F_{Auftrieb}$

$\rightarrow \quad 6\pi\eta v r \overset{!}{=} m_K g - \rho_{Fl} \cdot V \cdot g$

$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \quad \rightarrow \quad 6\pi\eta v r = \rho_K \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 g - \rho_{Fl} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 g$

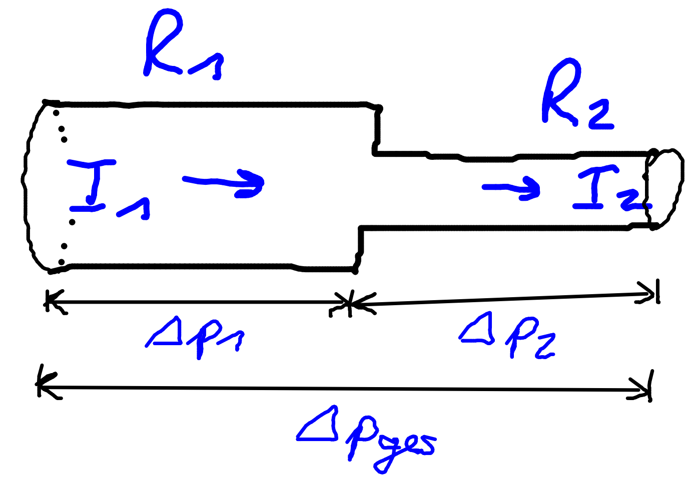
$$\longrightarrow \quad \boxed{v = 2g \cdot \frac{\rho_K - \rho_{Fl}}{9 \cdot \eta} \cdot r^2}$$

⤳ große Kugeln sinken schneller als kleine

# Kirchhoffsche Gesetze für Strömungswiderstände

▶ Reihen-, Serienschaltung

$$\boxed{R_{ges} = R_1 + R_2}$$

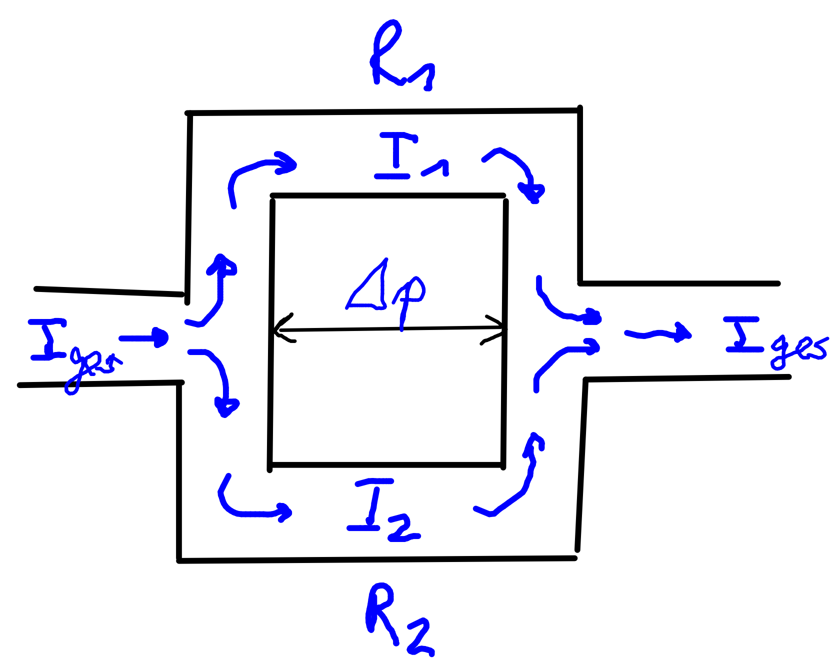



$I_1 = I_2 = I$

folgt aus: $R_{ges} \cdot I = \Delta p_{ges} = \Delta p_1 + \Delta p_2 = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I$

▶ Parallelschaltung

$$\boxed{\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$




folgt aus: $I_{ges} = \frac{\Delta p}{R_{ges}} = I_1 + I_2 = \frac{\Delta p}{R_1} + \frac{\Delta p}{R_2}$

# 2.7 Schwingungen

... sind zeitlich periodische Vorgänge bzw. Zustandsänderungen eines Systems (Oszillator),

- das aus Gleichgewicht gebracht wurde,
- in dem Kräfte in Richtung des Gleichgewichtszustandes wirken.

... können in fast allen physikalischen Systemen auftreten

Arten von Schwingungen:

- frei ungedämpfte Schwingung
- frei gedämpfte — " —
- erzwungene — " — — " —

Prinzipielles Konzept: Kräftegleichgewicht zwischen Trägheitskraft

$$F_T = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

und Rückstellkraft (z.B. Feder)

$$F_R = D \cdot x$$

Kräftegleichgewicht:

$$F_T + F_R = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + D \cdot x = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x} = -\underbrace{\frac{D}{m}}_{=:\,\omega_0^2} \cdot x = -\omega_0^2 \cdot x}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f}$$

Kreisfrequenz; Periodendauer; Schwingfrequenz

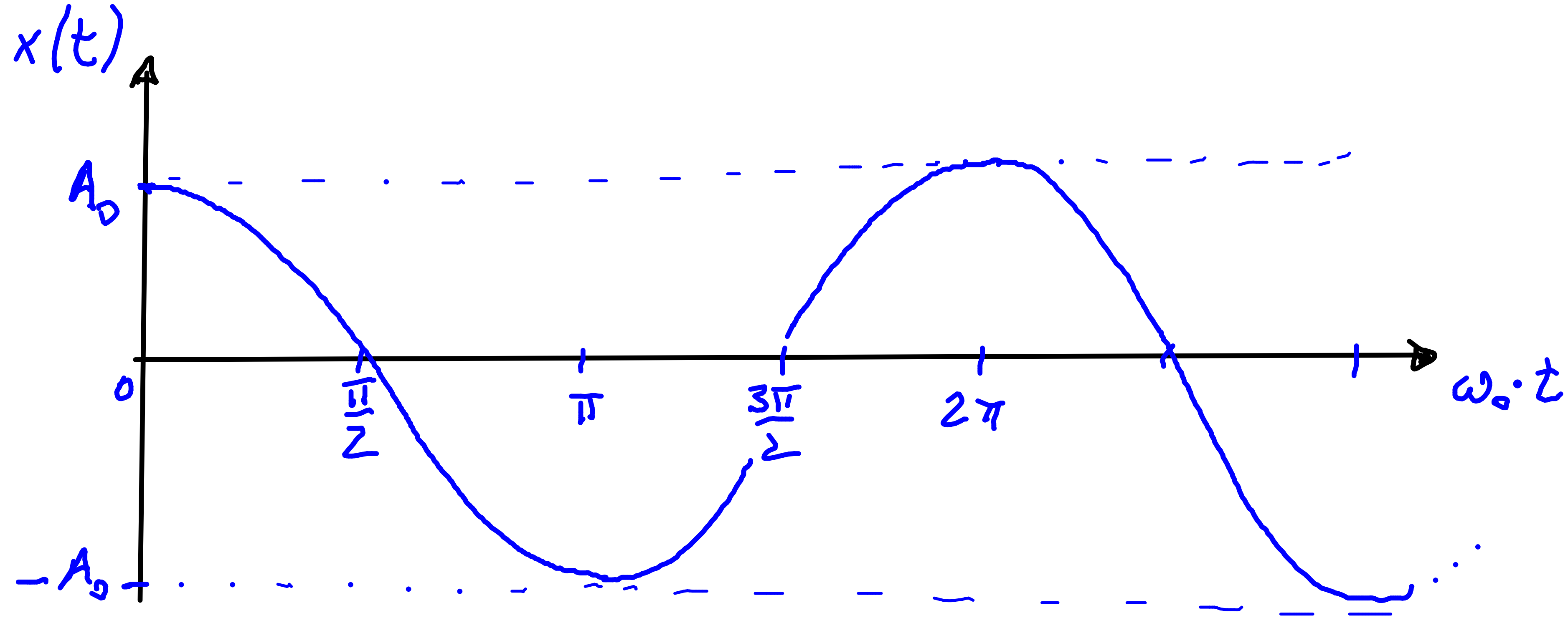
$\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 \cdot x}$ mit $x = x(t)$ ist Schwingungs-Differentialgleichung

Lösungsansatz: $\boxed{x(t) = A_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)}$

Amplitude ($A_0$); Phase bei $t = 0$ ($\varphi_0$)

Lösung:

z.B. $\varphi_0 = 0$

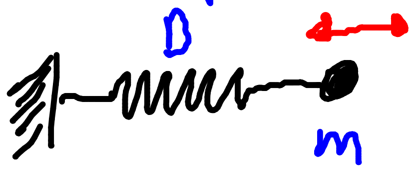



- **freie ungedämpfte Schwingung**
  - harmonische Schwingungen, wenn $F_R$ proportional zu $x$
  - Anfangsbedingungen bei $t=0$ bestimmen:
    - Amplitude $A_0$ : $x(0) = A_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot 0 + \varphi_0) = A_0 \cdot \cos\varphi_0$
    - Phase $\varphi_0$ : $\dot{x}(0) = v(0) = -\omega_0 \cdot A_0 \cdot \sin\varphi_0$

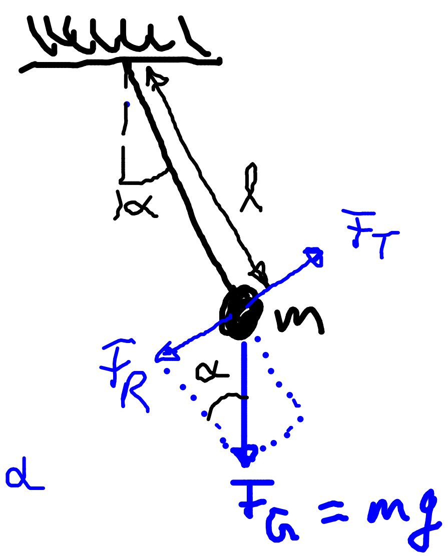
# Beispiele für harmonische Oszillatoren

- Federpendel

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}\cdot x = -\omega_0^2\cdot x \rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}}$$




- Fadenpendel




$F_R = mg\cdot\sin\alpha$

$M_T + M_R = 0$ mit Drehmomente $M_T$, $M_R$

$I\cdot\ddot{\alpha} + \ell\cdot F_R = 0$

$I\cdot\ddot{\alpha} + \ell\cdot m\cdot g\cdot\sin\alpha = 0$

(1) für kleine Winkel $\alpha$ gilt: $\sin\alpha \approx \alpha$ (in Radian)

(2) $I = m\cdot\ell^2$

$\Rightarrow m\ell^2\cdot\ddot{\alpha} + \ell\cdot m\cdot g\cdot\alpha = 0$

$\Rightarrow \ddot{\alpha} = -\frac{g}{\ell}\cdot\alpha = -\omega_0^2\cdot\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

hängt von $\ell$ ab
nicht von $m$!

# Gedämpfung Schwingungen

zusätzlich zu $F_T$, $F_R$ noch Dämpfungskraft $F_D$
(Stokessche Reibung: $F_D \sim v \sim \dot{x}$)

$$F_T + F_R + F_D = 0$$

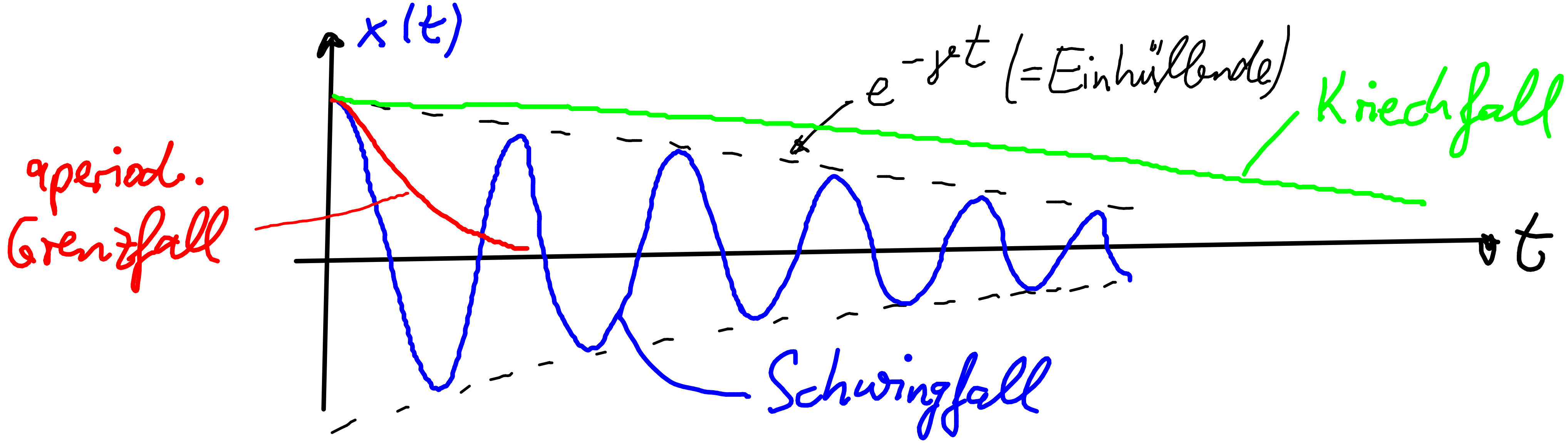
$$m\ddot{x} + Dx + 2\gamma m\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\frac{D}{m}\cdot x - 2\gamma\cdot\dot{x}}$$

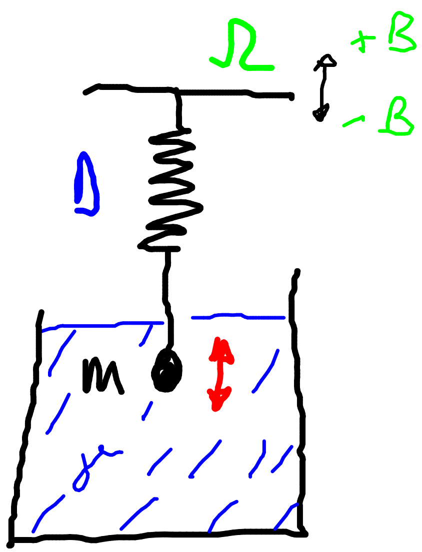
- $\omega_0 > \gamma$: Schwingfall: $\boxed{x(t) = \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{Dämpfungs-}} \cdot \underbrace{A_0 \cdot \cos(\omega\cdot t + \varphi_0)}_{\text{Schwingterm}}}$ mit $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$

- $\omega_0 < \gamma$: keine Schwingung, Kriechfall

- $\omega_0 = \gamma$: keine Schwingung, aperiodischer Grenzfall




## • Erzwungene (gedämpfte) Schwingungen



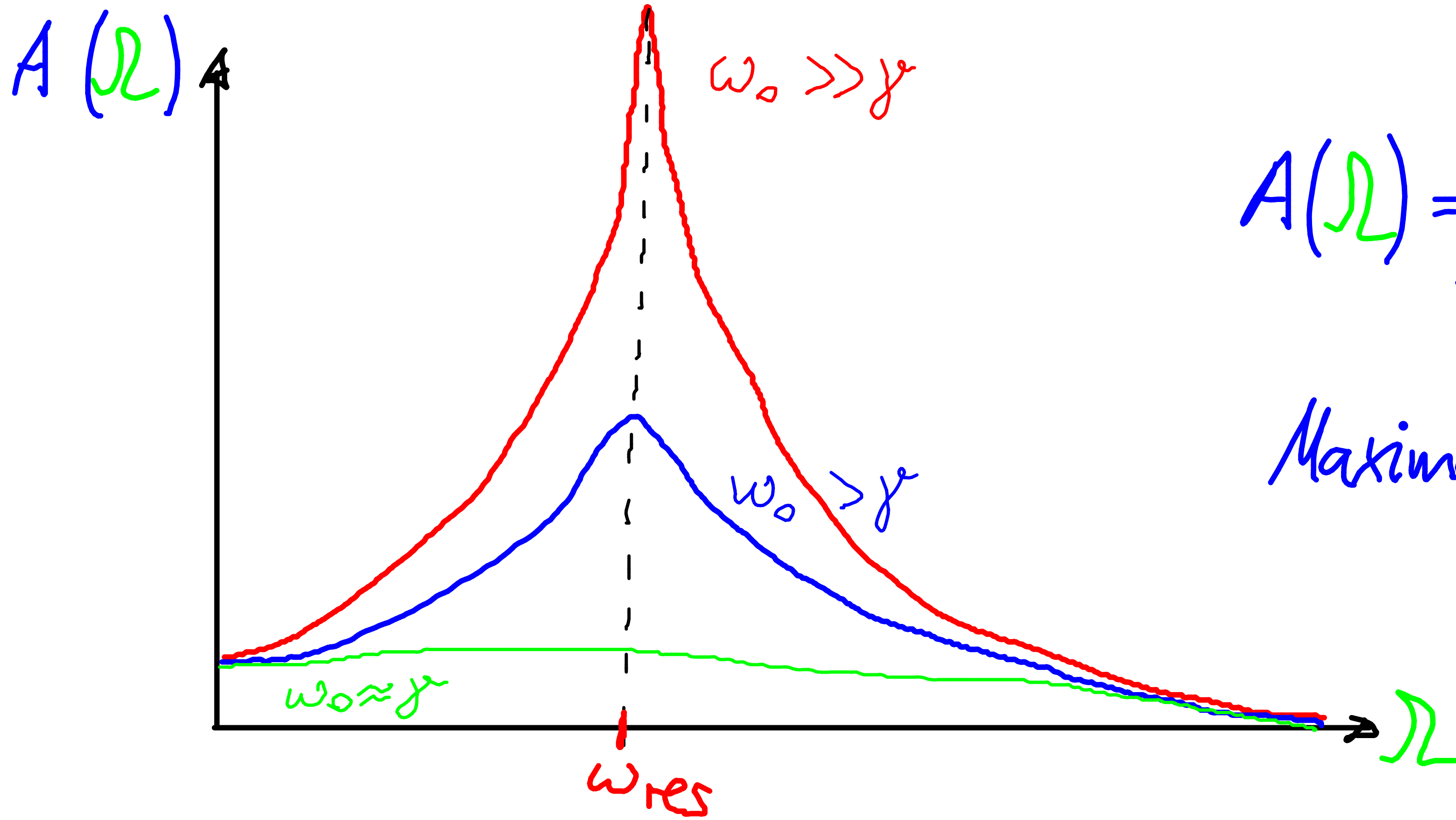

äußere, periodische Kraft $F_A = F_{ext} \cdot \cos \Omega \cdot t$ regt mit Kreisfrequenz $\Omega$ den Oszillator mit Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ an

$$F_T + F_R + F_D = F_A$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\gamma\dot{x} + \frac{F_{ext}}{m} \cdot \cos \Omega t$$

Lösung nach Einschwingvorgang

$$\boxed{x(t) = A(\Omega) \cdot \cos(\Omega t + \varphi(\Omega))}$$

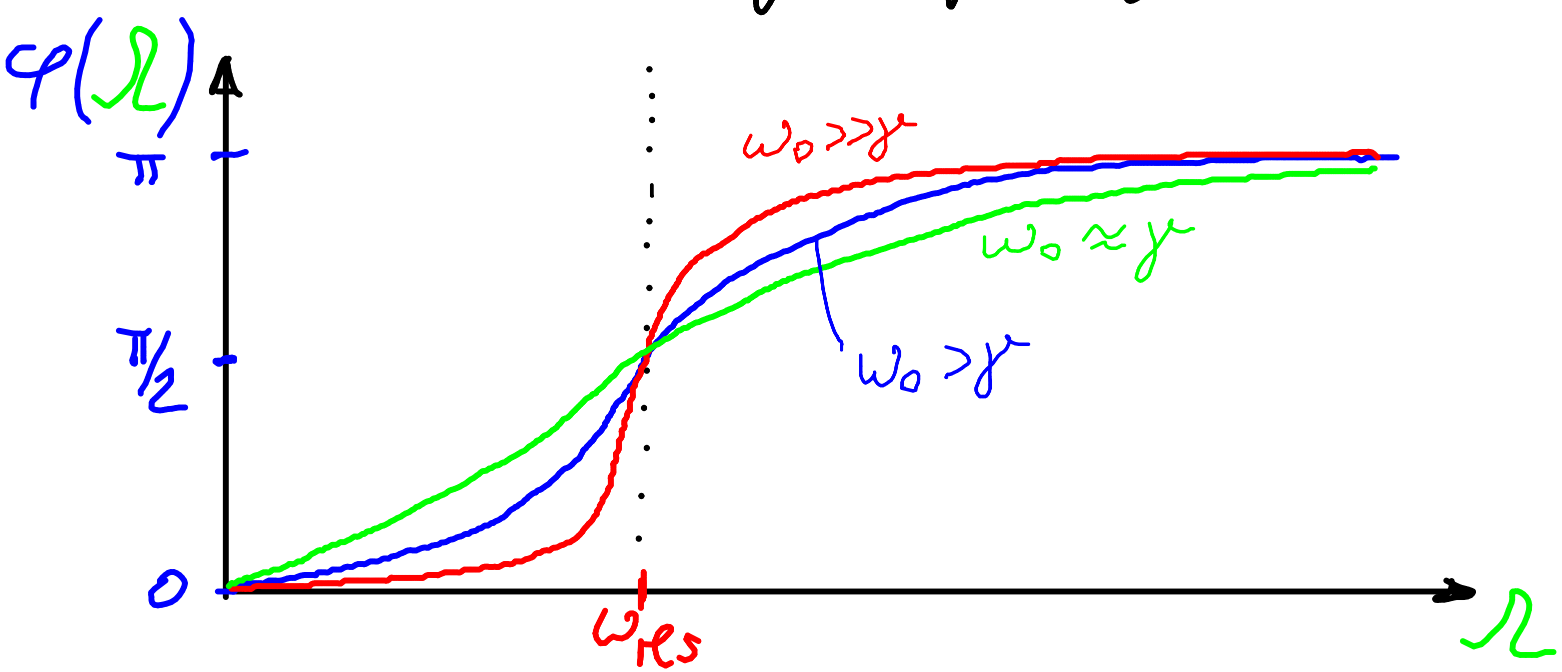



$$A(\Omega) = \frac{F_{ext}/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

Maximale Amplitude $A(\Omega)$ für $\Omega = \omega_{res}$ mit

$$\boxed{\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_{\text{gedämpfte}} < \omega_{0\,\text{freie Schwingung}}}$$

NB: ohne Dämpfung, d.h. $\gamma = 0$, geht $A(\omega_{res}) \to \infty$ : Resonanzkatastrophe




$$\tan\varphi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$