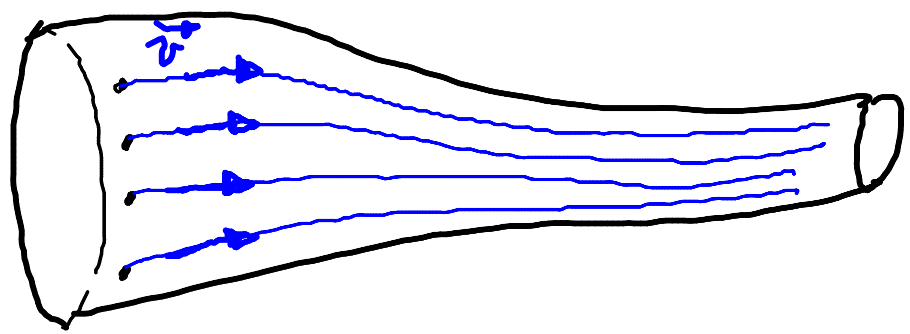
2.6 Hydrodynamik / Aerodynamik

Beschreibung der Strömung von Flüssigkeiten & Gasen (Fluiden)

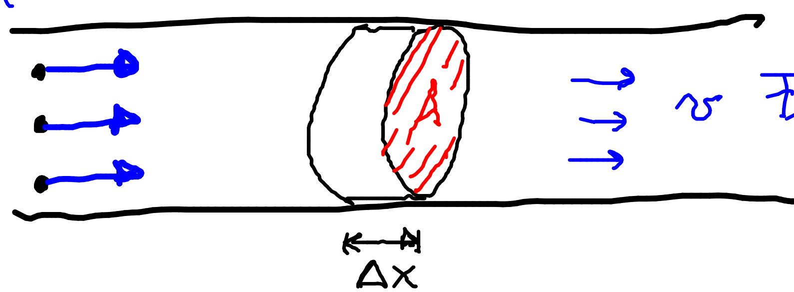
Strömungsfeld



Es genügt, alle Massenpunkte gemeinsam zu betrachten

- (Volumen-)Stromstärke

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$



v Fließgeschwindigkeit

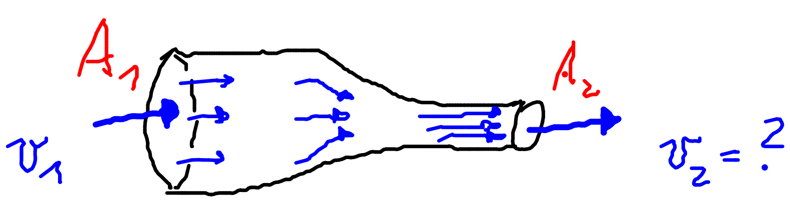
$$\Delta V = A \cdot \Delta x = A \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta t = A \cdot v \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot v$$

- **Kontinuitätsgleichung:**

(inkompressible Flüssigkeiten)

$$\boxed{I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot v = \text{const}}$$



$$\Rightarrow I_1 = A_1 \cdot v_1 \overset{!}{=} A_2 \cdot v_2 = I_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 > v_1$$

Betrachte Energiebilanz:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V \cdot (v_2^2 - v_1^2) > 0$$

Energieerhaltung erfordert Kompensation von $\Delta E_{kin} > 0$

$$\Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot h = \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot h$$

$$\Delta E_{pV} = F \cdot \Delta x = \underbrace{\frac{F}{A}}_{p} \cdot \underbrace{A \cdot \Delta x}_{\Delta V} = p \cdot \Delta V$$

$\Rightarrow$ $\Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} + \Delta E_{pV} = const.$ Energieerhaltung!

$$\frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V \cdot v^2 + \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot h + p \cdot \Delta V = const.$$

$\Rightarrow$ **Bernoulli Gleichung:**

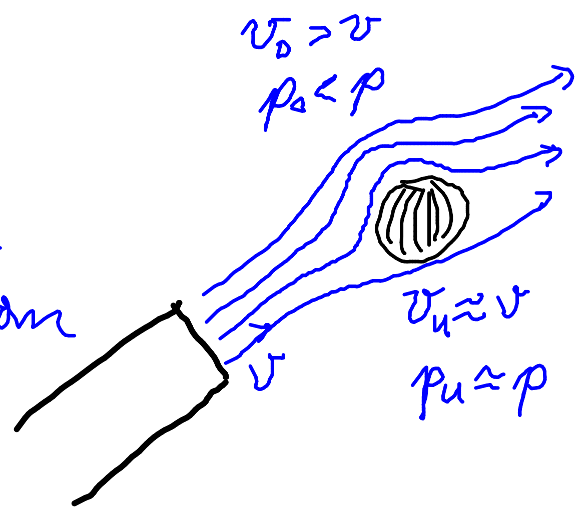
$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{2} \rho v^2}_{\text{Staudruck}} + \underbrace{\rho \cdot g h}_{\text{hydrostatischer/ Schweredruck}} + \underbrace{p}_{\text{statischer Druck}} = const.}$$

gilt streng in: inkompressiblen reibungsfreien Flüssigkeiten

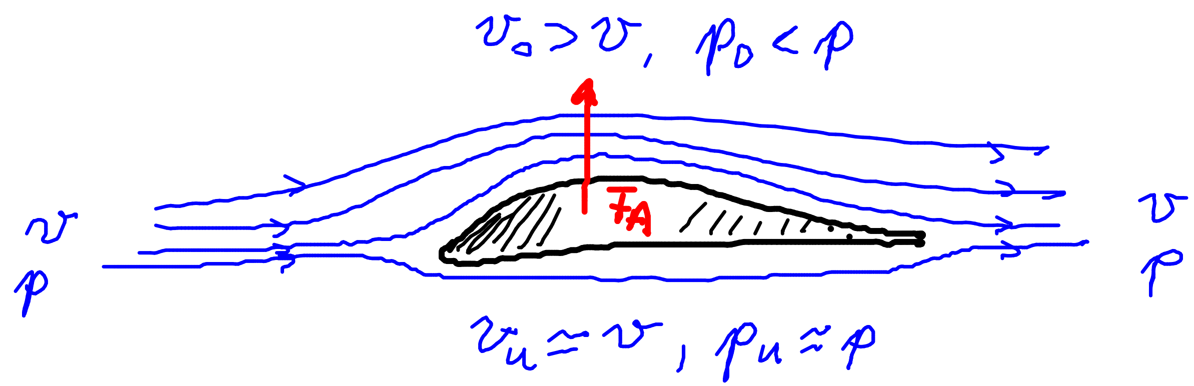
⇒ Hydrodynamisches Paradoxon

In Bereichen mit hohe Strömungsgeschwindigkeit (v) herrscht ein reduzierter statischer Druck (p)

- Ball im Luftstrom



- Flügel / Tragfläche:



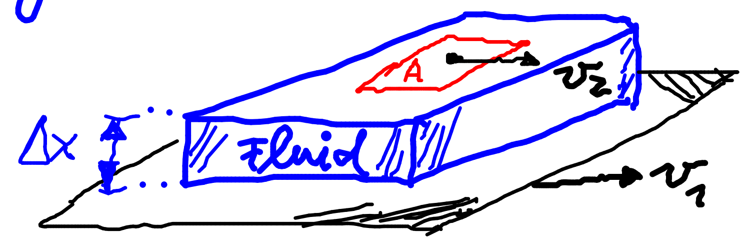
⇒ **dynamische Auftriebskraft** $\vec{F}_A$

- **Viskosität** / Zähigkeit

Kohäsionskräfte → innere Reibung

Reibungskraft

$$\boxed{F_R = -\eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}$$



$\Delta v = v_2 - v_1$

η: Viskosität, Einheit: $Pa \cdot s = \frac{N \cdot s}{m^2}$

- Viskosität ist temperaturabhängig
- — " — kann von $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ abhängen

falls unabhängig von $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ → **Newtonsche Flüssigkeit**

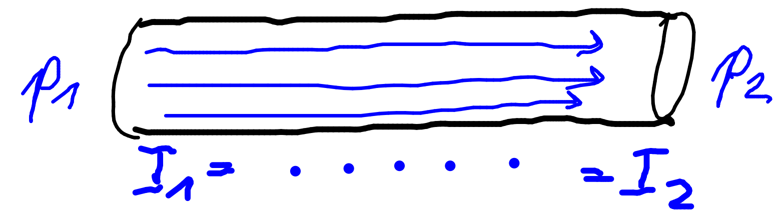
- Beispiele: Öl, Wasser, Luft, (Blut)

η: $\approx 1\,Pa \cdot s$, $10^{-3}\,Pa \cdot s$, $2 \cdot 10^{-5}\,Pa \cdot s$, $4.4 \cdot 10^{-3}\,Pa \cdot s$

- Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{F_R}{A}$ erforderlich, damit $I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \text{const.}$

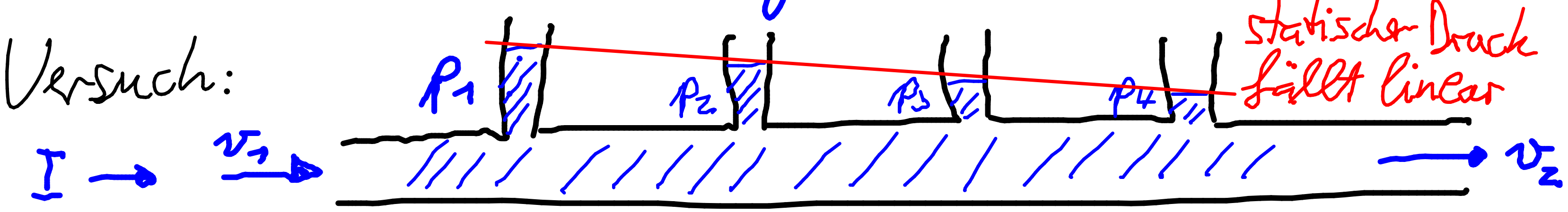
für Newtonsche Flüssigkeit:

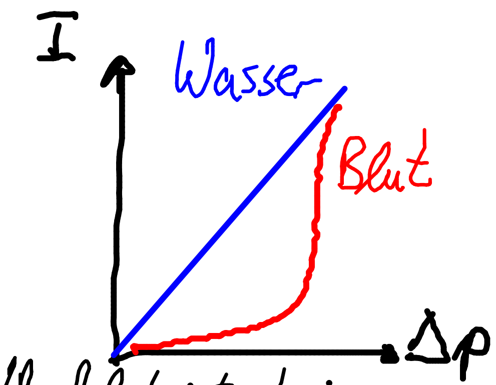
$$\boxed{\Delta p = R_S \cdot I}$$



R_S: Strömungswiderstand, Einheit $\frac{Ns}{m^5}$

Versuch:

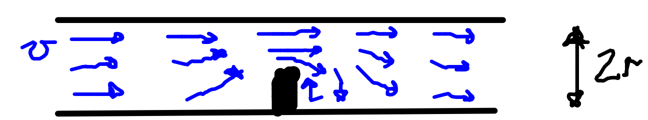




NB: Blut ist keine Newtonsche Flüssigkeit

Strömungen

- laminare Strömung sind wirbelfrei
- turbulente —"— haben Wirbel

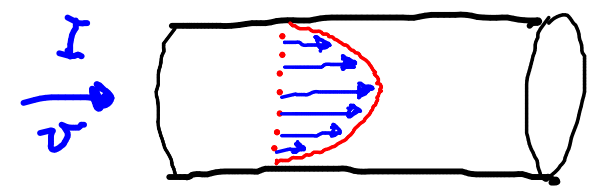


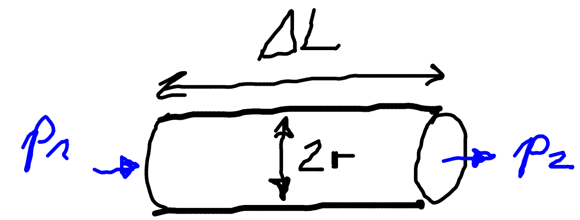
Reynoldszahl $\quad Re \sim \frac{r \cdot \rho \cdot v}{\eta}$ $\quad \begin{cases} \ll 1000 & \text{ergibt laminare Strömung} \\ \gg 1000 & \text{ergibt turbulente} \end{cases}$

$\Rightarrow v_{krit} \approx 1000 \cdot \frac{\eta}{\rho \cdot r}$; $v > v_{krit} \Rightarrow$ Strömungswiderstand $R_S \sim v^2$ ansteigend

laminare Strömung: Geschwindigkeitsprofil

parabelförmig
an Rohrwand ist $\vec{v} = 0$



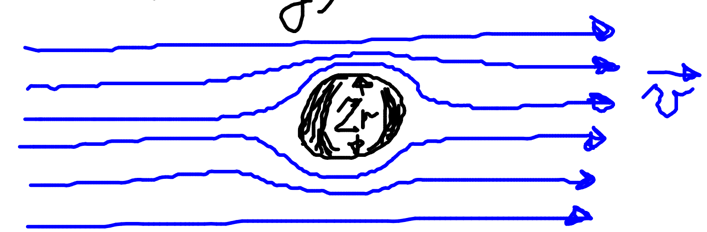


$\Rightarrow$ [redacted] **Gesetz von Hagen-Poiseuille**

$$\boxed{R_S = \frac{8\eta \cdot \Delta L}{\pi \cdot r^4}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{R_S} \cdot \Delta p = \pi \cdot \frac{r^4}{8 \cdot \eta \cdot \Delta L} \cdot \Delta p}$$

$I \sim \Delta p, \; I \sim \frac{1}{\eta}, \; I \sim \frac{1}{\Delta L}, \; I \sim r^4$

[redacted] **Stokes'sche Reibung** (häufiger Fall bei viskoser Reibung)



$$\boxed{\vec{F}_R = -6\pi \cdot \eta \cdot \vec{v} \cdot r}$$

Beispiel: Sinken einer Kugel $m_K = \rho_K \cdot V$ in Flüssigkeit ρ_{Fl}

$\rightarrow \quad F_R = F_G - F_{Auftrieb}$

$\rightarrow \quad 6\pi \eta v r \overset{!}{=} m_K g - \rho_{Fl} \cdot V \cdot g$

$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \quad \rightarrow \quad 6\pi \eta v r = \rho_K \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 g - \rho_{Fl} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 g$

$$\longrightarrow \quad \boxed{v = 2g \cdot \frac{\rho_K - \rho_{Fl}}{9 \cdot \eta} \cdot r^2}$$

$\rightsquigarrow$ große Kugeln sinken schneller als kleine