2. Übungsblatt

Besprechung: 31.10./02.11.2011

1. Bewegungsgleichungen (1 dim.)

Ein U-Bahnzug fährt vom U-Bahnhof "Universität" zum U-Bahnhof "Gieselastraße". Der Ablauf der Fahrt ist wie folgt:

1) $\Delta t_B = 18$ s lang wird mit konstant $a_B = 1.25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beschleunigt.
2) Die Fahrt wird mit konstanter Geschwindigkeit für $\Delta t_F = 20$ s fortgesetzt.
3) Abschließend wird mit $a_V = -3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ bis zum Halt gebremst.

Berechnen Sie mit diesen Angaben die Geschwindigkeit bei 2), die Zeitdauer Δt_V des Bremsvorgangs in 3) und die gesamte Fahrstrecke von 1), 2) und 3).

Lösung:

1) Endgeschwindigkeit der Beschleunigung: $v_B = a_B \cdot \Delta t_B = 1.25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 18\ \mathrm{s} = 22.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
   dabei zurückgelegte Wegstrecke: $x_B = \frac{1}{2}a_B \cdot (\Delta t_B)^2 = \frac{1}{2}1.25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (18\ \mathrm{s})^2 = 202.5\ \mathrm{m}$
2) Geschwindigkeit aus 1) wird beibehalten: $v_F = v_B$
   dabei zurückgelegte Wegstrecke: $x_F = v_B \cdot \Delta t_F = 22.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 20\ \mathrm{s} = 450.0\ \mathrm{m}$
3) Bremsen von v_F bis Halt $v_V = 0$ bedeutet $v_V = 0 = a_V \cdot \Delta t_V + v_F$
   aufgelöst nach Δt_V ergibt sich:
   $\Delta t_V = -\frac{v_F}{a_V} = -\frac{22.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{(-3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})} = 7.5\ \mathrm{s}$
   und daraus die zurückgelegte Wegstrecke zu
   $x_V = \frac{1}{2} \cdot a_V \cdot (\Delta t_V)^2 + v_F \cdot \Delta t_V = \frac{1}{2}(-3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}) \cdot (7.5\ \mathrm{s})^2 + 22.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (7.5\ \mathrm{s}) = -84.375 + 168.75 = 84.375\ \mathrm{m}$
   Die Gesamtfahrstrecke ist damit $x_G = x_B + x_F + x_V = 202.5 + 450 + 84.375 = 736.875\ \mathrm{m}$

2. Gleichförmige Translations- und Kreisbewegung, Vektoren

(a) Es sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ 0 \\ 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{pmatrix}$. An welchem Ort befindet sich befindet sich ein Massenpunkt nach der Zeit $\Delta t = t_1 - t_0$, wenn der Anfangsort $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ war?

(b) Bei Kreisfrequenz $\omega = 6.28$ Hz und Radius $r = 1$ m: An welchem Winkel relativ zur x-Achse befindet sich ein Massenpunkt nach der Zeit $\Delta t = 0.1$ s und nach 1 s, wenn der Anfangsort $\vec{r}(t_0 = 0) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ war?

Lösung:

(a) Geradlinige Bewegung:

$$\vec{r}(t_1) = \vec{v} \cdot \Delta t + \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} v_x \cdot \Delta t + x_0 \\ v_y \cdot \Delta t + y_0 \\ v_z \cdot \Delta t + z_0 \end{pmatrix}$$

Hier: $v_x = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_y = 0$, $v_z = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und damit

$$\vec{r}(t_1) = \begin{pmatrix} 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \Delta t + x_0 \\ 0 \\ 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \Delta t + z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \\ z(t_1) \end{pmatrix}$$

(b) Kreisbewegung:
Winkel φ relativ zur x-Achse gemessen $\rightarrow \varphi(t = t_0) = 0$ zur Zeit $t_0 = 0$.
Nach $\Delta t = 0.1$ s ist
$\varphi(t = t_0 + \Delta t) = \varphi(t = t_0) + \varphi(\Delta t) = 0 + \varphi(\Delta t) = \omega \cdot \Delta t = 6.28\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0.1\ \mathrm{s} = 0.628$ rad
Mit $\pi \widehat{=} 180° \quad \rightarrow \quad 0.628\ \mathrm{rad} \widehat{=} 0.628 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 36°$
Nach $\Delta t = 1$ s ist $\varphi(1\ \mathrm{s}) = 6.28$ rad und entsprechend $\varphi \approx 360°$

3. schiefer Wurf

Australische Riesenkänguruhs können bis zu 9 m weit springen. Ein solcher Sprung ist vergleichbar zu einem schiefen Wurf. Dafür gilt allgemein die Wurfhöhe H und Wurfweite L:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad L = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{g}$$

mit Abwurfgeschwindigkeit v_0, Abwurfwinkel α, Erdbeschleunigung $g = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Im folgenden sei angenommen, dass Känguruhs zur Erzielung der maximalen Sprungweite den optimalen Abwurfwinkel von 45° wählen. Berechnen Sie

(a) die Absprunggeschwindigkeit des Känguruhs, wenn es 9 m weit springt,
(b) die dabei erzielte Flughöhe,
(c) die horizontale Fortbewegungsgeschwindigkeit (in km/h).

(NB: Tatsächlich können diese Känguruhs sogar 60 km/h schnell springen. Was bedeutet dies für Absprunggeschwindigkeit, Absprungwinkel, maximal möglich Sprünghöhe?)

Lösung:

(a) Mit $L = 9$ m, $\alpha = 45°$ und $g = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ folgt durch Auflösung der Formel für L nach v_0

$$v_0^2 = \frac{g \cdot L}{\sin^2 2\alpha} \qquad \rightarrow \qquad v_0 = \frac{\sqrt{g \cdot L}}{\sin 2\alpha}$$

Einsetzen ergibt $v_0 \approx 9.4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \widehat{=} 33.8$ km/h

(b) Mit v_0 aus dem vorherigen Aufgabenteil berechnet sich die Flughöhe nach der Formel aus der Aufgabenstellung zu $H = \frac{9.4^2 \cdot \sin^2 45°}{2 \cdot 9.81} \approx 2.25$ m

(c) Da der Absprung unter einem Winkel von 45° erfolgt, ist die horizontale Geschwindigkeitskomponente gerade
$v_x = v_0 \cdot \cos 45° \approx 9.4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 6.6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \widehat{\approx} 24$ km/h

(Die höhere horizontale Geschwindigkeit bedeutet höhere Absprunggeschwindigkeit und flachere Absprungwinkel aber auch höhere maximale Sprunghöhen.)

4. Actio = Reactio

Sie können einen wassergefüllten Eimer mit ausgestrecktem Arm in einer vertikalen Kreisbahn rotieren, ohne dass das Wasser aus dem Eimer läuft, wenn sich der Eimer kopfüber befindet. Dazu müssen Sie eine Radialbeschleunigung in gleicher Größe wie die Erdbeschleunigung erzeugen. Wie groß muss die Winkelgeschwindigkeit ω und die Bahngeschwindigkeit v sein, damit für eine Armlänge von 60 cm gilt: Radialbeschleunigung = Erdbeschleunigung?

Lösung:
Die Radialbeschleunigung lautet: $a = r \cdot \omega^2$
Die Forderung der Aufgabe lautet: $g \stackrel{!}{=} a$
Eingesetzt und nach ω aufgelöst ergibt sich:
$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}0.6\ \mathrm{m} \approx 4.04\frac{1}{\mathrm{s}}$
Die Bahn- bzw. Tangentialgeschwindigkeit ist damit
$v = \omega \cdot r = 4.04\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0.6\ \mathrm{m} \approx 2.42\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$