EP Experimentalphysik **Prof. Biebel, PD Assmann**
Übungen **WS 2011/12**

3. Übungsblatt **Besprechung: 07./09.11.2011**

1. Gravitation und Scheinkräfte

Ein geostationärer Satellit rotiert mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit wie die Erde (er steht also immer über dem gleichen Punkt). Welche Kräfte wirken auf den Satelliten? Bestimmen Sie aus dem Kräftegleichgewicht die Höhe des Satelliten über dem Erdboden!
(Hinweis: Erdmasse $M_E \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg, Erdradius $R_E \approx 6400$ km,
Newtonsche Gravitationskonstante $G_N = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$)
(Lösungswert: $h \approx 35\,900$ km)

Lösung:
Die Gravitationskraft auf den Satelliten mit Masse m im Abstand r vom Erdmittelpunkt beträgt

$$F_G = G_N \cdot \frac{M_E \cdot m}{r^2}$$

Dieser Zentripetalkraft F_G steht im Kräftegleichgewicht bei einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega = \frac{2\pi}{24\ \mathrm{h}} = \frac{2\pi}{86\,400\ \mathrm{s}} \approx 7.27 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\mathrm{s}}$, eine gleich große Zentrifugalkraft F_{Zf} gegenüber:

$$F_{Zf} = m \cdot \omega^2 \cdot r \overset{!}{=} F_G = G_N \cdot \frac{M_E \cdot m}{r^2}$$

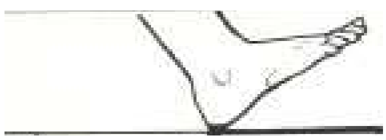
Auflösen nach r ergibt:

$$r = \left(\frac{G_N \cdot M_E}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \left(\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(7.27 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\mathrm{s}})^2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 4.2300 \cdot 10^7\ \mathrm{m} = 42300\ \mathrm{km}$$

Die Höhe h des geostationären Orbits über der Erdoberfläche beträgt somit $h \approx r - R_E = 35900$ km.

2. Reibung

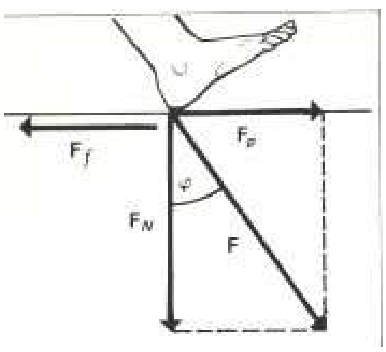
Reibung beim Gehen: Der nach vorne schwingende Fuß trifft unter einem Winkel φ mit einer Kraft $\vec{F}$ auf den Boden. Berechnen Sie für einen Haftreibungskoeffizienten (Leder auf Holz) von $\mu_H = 0.54$ den größtmöglichen Winkel φ, sodass der Fuß nicht ausgleitet.
(Lösungswert: $\varphi \approx 28.36°$)



Lösung:

Zunächst wir die Kraft $\vec{F}$ in die Normalkraftkomponente $\vec{F}_N$ und die Komponete $\vec{F}_p$ parallel zum Boden zerlegt. Für die Beträge dieser beiden Kraftkomponenten gilt der Zusammenhang

$$F_p = F_N \cdot \tan\varphi$$



Die parallele Kraftkomponente F_p muss durch eine entsprechend große, entgegengesetzt gerichtete Reibungskraft F_f zwischen Ferse und Boden kompensiert werden, damit der Fuß nicht ausgleitet. Also

$$F_f = \mu_H \cdot F_N \overset{!}{=} F_p = F_N \cdot \tan\varphi \quad \Rightarrow \quad \mu_H = \tan\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 28.36°$$

3. Energie, Leistung

Die australischen Riesenkänguruhs erreichen eine horizontale Fortbewegungsgeschwindigkeit von $v_x = 60$ km/h. Nach Aufgabe 3 des zweiten Übungsblattes erreichen australische Riesenkänguruhs bei Sprungweiten von 9 m eine Sprunghöhe von 2.25 m für einen Absprungwinkel von $\alpha = 45°$ und dabei eine horizontale Fortbewegungsgeschwindigkeit von $v_x = 24$ km/h.
Berechnen Sie

(a) die potentielle Energie im höchsten Punkt der Flugbahn,

(b) die kinetische Energie des Känguruhs beim Absprung,

(c) die mittlere Leistung pro Sprung bei gleichbleibender horizontaler Fortbewegungsgeschwindigkeit $v_x = 24$ km/h und Sprunghöhe H.
(Rechnen Sie möglichst allgemein! Überlegen Sie, ob das Ergebnis plausibel ist!)

(d) Messen Sie Ihre Kurzzeitleistung! Stoppen Sie dazu die Zeit zum Hochlaufen einer Treppe. Bestimmen Sie die potentielle Energie aus der Anzahl der zurückgelegten Treppenstufen. Treppenstufen haben eine typische Höhe von 18 bis 20 cm.

(Hinweis: Männliche Känguruhs haben eine Masse von typischerweise 55 kg. Nutzen Sie für Teilaufgabe (c) die Formeln des zweiten Übungsblatts für Sprunghöhe H und Sprungweite L:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad ; \quad L = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

mit Abwurfgeschwindigkeit v_0, Abwurfwinkel α, Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.)
(Lösungswerte: $E_{\mathrm{pot}} \approx 1214$ J, $E_{\mathrm{kin}} \approx 2448$ J, $\overline{P} \approx 904$ W)

Lösung:

(a) Es gilt: $E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot H$ mit $H = 2.25$ m und $g = 9.81 \mathrm{m/s}^2$.
Damit ist $E_{\mathrm{pot}} \approx 1214$ J

(b) Es gilt $E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{kin}}$ =const. Also ist die Gesamtenergie beim Absprung (Index 0) und am obersten Punkt der Flugbahn (Index H) gleich:

$$E_{\mathrm{pot,\,0}} + E_{\mathrm{kin,\,0}} = E_{\mathrm{pot,\,H}} + E_{\mathrm{kin,\,H}}$$

Am Absprungpunkt ist $E_{\mathrm{pot,0}} = 0$. Am obersten Punkt der Flugbahn bewegt sich das Känguruh ausschließlich horizontal mit der Geschwindigkeit v_x. Dort ist also $E_{\mathrm{kin,H}} = \frac{1}{2}mv_x^2$. Damit ist die kinetische Energie des Känguruh beim Absprung:

$$E_{\mathrm{kin,\,0}} = E_{\mathrm{pot,\,H}} + E_{\mathrm{kin,\,H}} = mgH + \frac{1}{2}mv_x^2$$

Mit $m = 55$ kg, $v_x = 24$ km/h ≈ 6.7 m/s, $H = 2.25$ m ergibt dies $E_{\mathrm{kin,0}} = 2448$ J

(c) Zunächst ist die Zeitdauer eines Sprungs zu ermitteln. Dazu wird $v_x = \frac{L}{T}$ und $v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$ verwendet:

$$T = \frac{L}{v_x} = \frac{L}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

Bei einem Sprung muss das Känguruh die Energie E_{pot} aus Teil (b) bereitstellen, um die Sprungshöhe $H = 2.25$ m zu erreichen. Die mittlere Leistung beträgt also

$$\overline{P} = \frac{E_{\mathrm{pot}}}{T} = \frac{mgH \cdot v_x}{L}$$

Einsetzen von H und L sowie Ersetzung von v_0 durch $v_x = v_0 \cos\alpha$ ergibt mit $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$:

$$\overline{P} = \frac{mg \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \cdot v_x}{\frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}} = \frac{mg \cdot \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot v_x}{2\cos\alpha} = \frac{1}{4} mgv_x \tan\alpha$$

Für $m = 55$ kg, $g = 9.81$ m/s^2, $v_x \approx 6.7$ m/s, $\alpha = 45°$ ergibt sich: $\overline{P} \approx 904 \frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^3} = 904$ W Diese Leistung von ca. 1 kW kann ein Känguruh höchstens kurzzeitig aufbringen.

(d) Zum Vergleich: Die Dauerleistung eines untrainierten Menschen beträgt < 100 W, die Kurzzeitleistung 1 kW.