4. Übungsblatt

Besprechung: 14./16.11.2011

1. Stöße

Der Bewegungsablauf von Landung bis Absprung beim Känguruh kann vereinfacht auch als Stoßvorgang betrachtet werden. Für diese Aufgabe soll angenommen werden, dass das Känguruh aus der Sprunghöhe von 2.25 m auf dem Boden landet und dann sofort wieder abspringt. Das Känguruh habe eine Masse von 55 kg.

(a) Berechnen Sie die vertikale Impulskomponente bei der Landung.

(b) Wenn dieser Stoßprozess von Ladung und Absprung vollkommen elastisch und ohne Arbeitsaufwand des Känguruhs stattfindet, welche maximale Sprunghöhe erreicht das Känguruh nach dem Absprung?

(c) Berücksichtigen wir nun den Untergrund, von dem das Känguruh abspringt. Bei einem sandigen Untergrund hinterlässt das Känguruh im Boden einen Fussabdruck, sodass der Stoßprozess inelastisch ist. Wie groß ist Arbeit, die zur Verformung des Sandes aufgewendet wurde, wenn das Känguruh nur noch mit der Hälfte des Lande-Impulses aus (a) abspringen kann? Wie hoch würde das Känguruh dabei springen?

(d) Wenn das Känguruh nach der Ladung auf hartem Untergrund nicht mehr abspringt, handelt es sich dann um einen vollkommen inelastischen Stoß? (Antwort mit kurzer Begründung)

(Lösungswerte: (a) 363 kg·m/s, (b) 2.25 m, (c) 898 J, 0.56 m, (d) Ja)

Lösung:

(a) Die potentielle Energie von $E_{\text{pot}} = 1214$ J aus Aufgabe 3 des dritten Übungsblatts liegt bei der Landung vollständig als kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_\perp^2 \stackrel{!}{=} E_{\text{pot}}$ vor.
$\Rightarrow v_\perp = \sqrt{\frac{2E_{\text{pot}}}{m}} \approx 6.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Damit beträgt die vertikale Impulskomponente $p_\perp = m \cdot v_\perp \approx 363 \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$

(b) Beim Stoßprozess gilt Energieerhaltung. Beim elastischen Stoß wird keine kinetische Energie in Wärme (oder als Deformationsarbeit) umgewandelt. Also ist die maximale Sprunghöhe wiederum 2.25 m. (Voraussetzung ist, dass das Känguruh die gesamte Energie bei dem Stoßprozess kurzzeitig in Sehnen und Bändern speichern kann.)

(c) Im Stoßprozess gilt Impulserhaltung $\quad p_{\perp,\text{Landung}} + 0 \stackrel{!}{=} p_{\perp,\text{Absprung}} + p_{\text{Sand}}$
wobei nach Aufgabenstellung $p_{\perp,\text{Absprung}} = \frac{1}{2} p_{\perp,\text{Landung}}$.
Da der Sand nach dem Absprung wieder ruht, also $v_{\text{Sand}} = 0$ ist, und da $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$ ist, gilt für die Energiebetrachtung:
$E_{\text{kin,Landung}} + 0 \stackrel{!}{=} E_{\text{kin,Absprung}} + E_{\text{kin,Sand}} + Q_{\text{Sand}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_{\perp,\text{Landung}}^2}{2m} \stackrel{!}{=} \frac{p_{\perp,\text{Absprung}}^2}{2m} + Q_{\text{Sand}} = \frac{\frac{1}{2} p_{\perp,\text{Landung}}^2}{2m} + Q_{\text{Sand}}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{\text{Sand}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{p_{\perp,\text{Landung}}^2}{2m} \approx 898 \text{ J}$$

Die Sprunghöhe folgt aus Energieerhaltung: $E_{\text{kin,Absprung}} \stackrel{!}{=} E_{\text{pot,Absprung}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_{\perp,\text{Absprung}}^2}{2m} = \frac{p_{\perp,\text{Landung}}^2}{4m} \stackrel{!}{=} mgH_{\text{Absprung}}$$

$$\Rightarrow \quad H_{\text{Absprung}} = \frac{p_{\perp,\text{Landung}}^2}{4gm^2} \approx 0.56 \text{ m}$$

(d) Es ist ein vollkommen inelastischer Stoß, da die Gesamtenergie in Deformationsarbeit oder Wärme umgewandelt wird. Am harten Untergrund wird zwar keine Deformationsarbeit geleistet. Stattdessen muss das Känguruh mit Hilfe seiner Beinmuskeln die Bewegung abbremsen. Um die Bewegung zu beenden, muss das Känguruh also seine Muskeln deformieren.

2. Drehimpulserhaltung, Trägheitsmoment

Laut einer Theorie ist der Mond während der Planetenentstehung aus einer Kollision eines marsgroßen Planeten Theia mit der Proto-Erde hervorgegangen. Für die nachfolgende Rechnung sei dieser Planet Theia vernachlässigt und die heutige Erde anstelle der Proto-Erde betrachtet.

(a) Berechnen Sie den Gesamtdrehimpuls des heutigen Erde-Mond-Systems, also von Erdrotation und Mondumlauf um Erde (die Mondeigenrotation kann vernachlässigt werden).

(b) Wenn vor der Kollision von Theia die gesamte Mondmasse in der Proto-Erde war, wie lange dauerte dann eine Umdrehung der Proto-Erde? (Hinweis: Bedenken Sie auch den veränderten Radius der Proto-Erde)

Notwendige Daten: Erdmasse $M_E = 5.977 \cdot 10^{24}$ kg, Mondmasse $M_M = 7.34 \cdot 10^{22}$ kg, Erdradius $R_E = 6378$ km, Mondradius $R_M = 1738$ km, Abstand Erdmittelpunkt-Mondmittelpunkt $r_{ME} = 384\,000$ km, Umlaufdauer des Mondes um die Erde $T_M = 27.32$ Tage.
Notwendige Formeln: Trägheitsmoment einer Kugel $I = \frac{2}{5} M R^2$, Kugelvolumen $V = \frac{4\pi}{3} R^3$

(Lösungswerte: (a) $3.588 \cdot 10^{34}$ Js, (b) 4 h 51 min 10 s)

Lösung:

(a) Zwei separate Beiträge zum Gesamtdrehimpuls:
- Erdrotation:
  Trägheitsmoment der Erdkugel $I_E = \frac{2}{5} M_E \cdot R_E^2 \approx 9.726 \cdot 10^{37}\ \mathrm{kg\,m^2}$
  Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation: $\omega_E = \frac{2\pi}{24\ \mathrm{h}} \approx 7.272 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\mathrm{s}}$
  Damit Drehimpuls $L_E = I_E \cdot \omega_E \approx 7.073 \cdot 10^{33} \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}} = 7.073 \cdot 10^{33}\ \mathrm{N \cdot m \cdot s} [= \mathrm{J \cdot s}]$
- Mond-Erde Umlauf:
  Punktmasse M_M im Abstand r_{ME} hat Trägheitsmoment
  $I_{ME} = M_M \cdot r_{ME}^2 \approx 1.082 \cdot 10^{40}\ \mathrm{kg\,m^2}$
  Winkelgeschwindigkeit des Mondumlaufs: $\omega_{ME} = \frac{2\pi}{27.32\ \mathrm{d}} \approx 2.662 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\mathrm{s}}$
  Damit Drehimpuls $L_{ME} = I_{ME} \cdot \omega_{ME} \approx 2.881 \cdot 10^{34} \mathrm{N \cdot m \cdot s}$

Gesamtdrehimpuls $L = L_E + L_{ME} \approx 3.588 \cdot 10^{34}$ Js

(b) Es gilt Drehimpulserhaltung!
Wenn die Mondmasse mit der Erde vereinigt war, dann ergibt sich
- der Radius der Proto-Erde aus der Summe der Kugelvolumina zu:
  $V_{PE} = V_E + V_M \;\Rightarrow\; \frac{4\pi}{3} R_{PE}^3 = \frac{4\pi}{3} R_E^3 + \frac{4\pi}{3} R_M^3 \;\Rightarrow\; R_{PE} = \sqrt[3]{R_E^3 + R_M^3} \approx 6421$ km
- die Masse der Proto-Erde zu:
  $M_{PE} = M_E + M_M \approx 6.050 \cdot 10^{24}$ kg

Nach Drehimpulserhaltung folgt mit dem Gesamtdrehimpuls aus Teil (a):
$L \stackrel{!}{=} L_{PE} = I_{PE} \cdot \omega_{PE} = \left(\frac{2}{5} M_{PE} R_{PE}^2\right) \cdot \omega_{PE}$
$\Rightarrow \omega_{PE} = \frac{L}{\left(\frac{2}{5} M_{PE} R_{PE}^2\right)} \approx \frac{3.588 \cdot 10^{34}\ \mathrm{Js}}{9.977 \cdot 10^{37}\ \mathrm{kg\,m^2}} \approx 3.597 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\mathrm{s}}$
Daraus folgt die Umdrehungszeit $T_{PE} = \frac{2\pi}{\omega_{PE}} \approx 17470\ \mathrm{s} = 4$ h 51 min 10 s

3. Drehmoment, Schwerpunkt, Statik

Die meisten Insekten haben sechs Beine. Geben Sie eine physikalische Begründung!

Lösung:
Zentraler Grund ist, dass man mit sechs Beinen ohne Energieaufwand das Gleichgewicht halten kann.

- 1 Bein: Nur stabil, wenn Schwerpunkt genau über Stützpunkt am Boden.
- 2 Beine: seitlich stabil, vor-&rückwärts nur stabil, wenn Schwerpunkt zwischen den Beinen liegt.
- 3 Beine: statisch stabil; instabil, sobald ein Bein zur Fortbewegung angehoben wird
- 4 Beine: statisch stabil; stabil, wenn nur ein Bein zur Fortbewegung angehoben wird; instabil, sobald zwei Beine angehoben werden
- 5 Beine: statisch stabil; stabil bei Anheben von bis zu zwei Beinen ($\rightarrow$ komplizierte Koordination des Bewegungsablaufs)
- 6 Beine: statisch stabil; stabil bei Anheben von bis zu drei Beinen (symmetrische Beinbewegung zur Fortbewegung möglich, einfach Koordination)