5. Übungsblatt **Besprechung: 21./23.11.2011**

1. Auftrieb, Dichte

Ein Körper der Masse $m = 1$ kg hat ein Volumen $V = 800$ cm^3, ist in Wasser eingetaucht und hängt an einer Federwaage. Welche Kraft zeigt die Federwaage an?

(Lösungswerte: 2 N)

Lösung:
Schwerkraft: $F_G = 1 \text{ kg} \cdot g \approx 10$ N
Auftriebskraft: $F_A = \rho_{\text{Fl}} \cdot V \cdot g = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 800 \text{ cm}^3 \cdot g \approx 8$ N
Kraftanzeige der Waage ist $\Rightarrow F_W = F_G - F_A \approx 10 - 8 = 2$ N

2. Elastizitätsmodul

Bei jedem Sprung muss das Riesenkänguruh $E_{\text{pot}} = 1214$ J aufwenden, wie in Aufgabe 3 des 3. Übungsblatts berechnet wurde. Diese Energie kann das Känguruh bei der Landung (zu einem großen Teil) in den Sehnen der Beinmuskulatur für den nachfolgenden Absprung zwischenspeichern. Der Elastizitätsmodul einer Sehne beträgt $E \approx 20 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Die Elastizitätsgrenze liegt bei ca. $\sigma_{\text{max.elast.}} \approx 50 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ und wird bei einer Dehnung der Sehne von 5% erreicht. Diese Elastizitätsgrenze sollte natürlich nicht überschritten werden. Die Länge der Beinsehne beträgt $L \approx 41$ cm.

(a) Berechnen Sie die Richtgröße D Sehne, zur Speicherung der gesamten potentiellen Energie.

(b) Welche Querschnittsfläche müsste die Sehne dabei haben? Und welchen Durchmesser d, falls der Querschnitt als kreisrund angenommen wird? (Ergebnis in xx mm^2 und yy mm)

Hinweis: Die Formel für die gespeicherte Energie einer Feder ist: $E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2} D x^2$.
(Lösungswerte: (a) $D \approx 2.89 \cdot 10^6$ N/m, (b) $A \approx 590$ mm^2, $d \approx 27.4$ mm)

Lösung:

(a) Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ ist maximal $\varepsilon = 5\%$. Die Längenänderung von $x = \Delta L$ steht für die Speicherung der Energie zur Verfügung.
Damit gilt mit der angegebenen Formel für die gespeicherte Energie einer Feder und unter Beachtung, dass ein Känguruh zwei Beine hat,

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &\stackrel{!}{=} 2E_{\text{Feder}} = 2 \cdot \frac{1}{2} D(\Delta L)^2 = (L^2 \cdot D) \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 = (L^2 \cdot D)(\varepsilon)^2 \\ \Rightarrow \quad D &= \frac{E_{\text{pot}}}{L^2 \cdot \varepsilon^2} \approx 2.89 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \end{aligned}$$

(b) Es gilt $D = \left(\frac{E \cdot A}{L}\right)$ mit Sehnenquerschnitt A. Mit dem Ergebnis aus Teil (a) und E und L aus der Aufgabenstellung folgt
$A = \frac{L \cdot D}{E} \approx 5.9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \widehat{=} 590 \text{ mm}^2$
Bei kreisrundem Querschnitt gilt: $A = \pi \frac{d^2}{4}$
$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \approx 27.4$ mm

3. Oberflächenspannung

Wasserläufer *Heavy* frisst zu viel. Bei welcher Masse (in Gramm) zerreißt die Oberfläche und er sinkt ein? (Oberflächenspannung von Wasser $\sigma_{H_2O} = 0.073$ N/m)
Zur Vereinfachung nehmen wir an, die vier Füße sind flache, kreisförmige Scheiben mit 4 mm Durchmesser
(Lösungswert: 0.4 g)

Lösung:
Gewichtskraft ist $F_G = m \cdot g$, kritische Masse ist m_{krit}.
Kraft zum Zerreißen der Oberfläche: $F_{\text{krit}} = \sigma_{H_2O} \cdot b$, wobei $\sigma_{H_2O} = 0.073$ N/m und b die Gesamtlänge des Randes ist, also $b = 4 \cdot 2\pi \cdot 2$ mm$= 0.05$ m
$\Rightarrow \quad F_{\text{krit}} = 0.073 \cdot 0.05 \text{ N} \approx 0.0037 \text{ N}$
$\Rightarrow \quad m_{\text{krit}} = \frac{F_{\text{krit}}}{g} \approx \frac{0.0037 \text{ N}}{9.81 \text{m/s}^2} \approx 0.00038 \text{ kg}$
Also: $m_{\text{krit}} \approx 0.4$ g

4. Kontinuitätsgleichung

An der Meerenge von Gibraltar strömen ca. 1 Million Kubikmeter Wasser pro Sekunde aus dem Atlantik in das Mittelmeer. An dieser Stelle ist die Meerenge 14 km breit und 300 m tief. Sie vergrößert sich dann auf 44 km Breite und 900 m Tiefe. Zur Einfachheit sei ein rechteckiger Querschnitt der Meerenge und ein gleichförmiger Wasserstrom über den gesamten Querschnitt angenommen. Berechnen Sie die Strömungsgeschwindigkeit an der engsten Stelle und an der breitesten Stelle der Meerenge!
(Lösungswerte: $v_{\text{eng}} \approx 0.24$ m/s, $v_{\text{breit}} \approx 0.025$ m/s)
(Hinweis: In der Realität ist der Volumenstrom hauptsächlich an der Wasseroberfläche und im Zentrum der Meerenge, sodass die Strömungsgeschwindigkeit an der Engstelle tatsächlich viel höher ist!)

Lösung:
Es gilt die Kontinuitätsgleichung $A \cdot v = I$ const.
Bei rechteckigem Querschnitt an der engsten Stelle ist
$A_{\text{eng}} = 14\,000 \text{ m} \cdot 300 \text{ m} = 4.2 \cdot 10^6 \text{m}^2$
Mit einer Volumenstromstärke $I = 10^6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ folgt
$v_{\text{eng}} = \frac{I}{A} = \frac{10^6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{4.2 \cdot 10^6 \text{ m}^2} \approx 0.24 \frac{\text{m}}{\text{s}} \widehat{=} 0.85 \text{km/h}$
An der breitesten Stelle ist $A_{\text{breit}} = 44\,000 \text{ m} \cdot 900 \text{ m} = 39.6 \cdot 10^6 \text{m}^2$.
Hier beträgt die Strömungsgeschwindigkeit
$v_{\text{breit}} = \frac{I}{A} = \frac{10^6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{39.6 \cdot 10^6 \text{ m}^2} \approx 0.025 \frac{\text{m}}{\text{s}} \widehat{=} 0.09 \text{km/h}$.