6. Übungsblatt **Besprechung: 28./30.11.2011**

1. Volumenstromstärke, Viskosität, Strömungswiderstand

Eine Infusionsflasche hängt 80 cm über der Einstichstelle. Die Kanüle hat einen Innendurchmesser von 0.5 mm und eine Länge von 4 cm. Der Strömungswiderstand des Schlauches kann vernachlässigt werden.

(a) Wie lange dauert es, bis 50 ml Infusionslösung verabreicht sind? Dabei sei die Viskosität der Infusionslösung $\eta = 1$ mPa·s und die Dicht $\rho = 1000$ kg/m^3.
(Blutdruck und Abnahme der Flüssigkeitssäule werden vernachlässigt!)

(b) Wie groß ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der Kanüle?

(c) Wie groß müsste der Radius der Kanüle sein, wenn die Infusionszeit $t = 83$ Sekunden betragen soll?

(Lösungswerte: (a) $t \approx 166$ s, (b) $\overline{v} \approx 1.53$ m/s, (c) $r \approx 0.3$ mm)

Lösung:
Es sind: Höhe $h = 0.8$ m, Radius der Kanüle $r = 2.5 \cdot 10^{-3}$ m, Länge der Kanüle $L = 0.04$ m

(a) Es sind Volumen $V = 50 \cdot 10^{-6}$ m^3, $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ Pa·s, $\rho = 1000$ kg/m^3.
Es gilt $\Delta p = R_s \cdot I$ mit Volumenstromstärke $I = \frac{V}{t}$ und Strömungswiderstand R_s.

$$\rightarrow \quad t = \frac{V}{I} = \frac{V \cdot R_s}{\Delta p}$$

Strömungswiderstand folgt aus Formel von Hagen-Poiseuille zu $R_s = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$, also eingesetzt

$$\rightarrow \quad t = \frac{8\eta \cdot L \cdot V}{\pi \cdot r^4 \cdot \Delta p}$$

Die Druckdifferenz Δp folgt aus dem Schweredruck, da die Infusionsflasche über der Einstichstelle hängt, also $\Delta p = \rho g h$

$$\rightarrow \quad t = \frac{8\eta \cdot L \cdot V}{\pi \cdot r^4 \cdot \rho \cdot g \cdot h} \qquad (*)$$

$$\rightarrow \quad t = \frac{8 \cdot 1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa\,s} \cdot 0.04\ \mathrm{m} \cdot 50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3}{\pi \cdot (2.5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m})^4 \cdot 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0.8\ \mathrm{m}} \approx \frac{1.6 \cdot 10^{-8}}{9.63 \cdot 10^{-11}}\ \mathrm{s} \approx 166\ \mathrm{s}$$

(b) Die mittlere Geschwindigkeit folgt aus der Volumenstromstärke $I = \frac{V}{t} = \frac{x \cdot A}{t} = \frac{x}{t} \cdot A = \overline{v} \cdot A$
$\rightarrow \quad \overline{v} = \frac{I}{A} = \frac{V}{t \cdot A} = \frac{50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3}{166\ \mathrm{s} \cdot \pi \cdot (2.5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m})^2} \approx 1.53 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

(c) Auflösen der Formel (*) aus Teil (a) nach r statt t ergibt:

$$\rightarrow \quad r^4 = \frac{8V\eta L}{\pi t \rho g h}$$

Nun ist $t = 83$ s, die übrigen Daten bleiben gleich

$$\rightarrow \quad r^4 = \frac{8 \cdot 1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa\,s} \cdot 0.04\ \mathrm{m} \cdot 50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3}{\pi \cdot 83\mathrm{s} \cdot 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0.8\ \mathrm{m}} \approx \frac{1.6 \cdot 10^{-8}}{2.05 \cdot 10^{6}}\ \mathrm{m}^4 \approx 7.82 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}^4$$

Zweimal Quadratwurzelziehen ergibt $r \approx 2.97 \cdot 10^{-4}$ m ≈ 0.3 mm

2. Auftrieb, Schweredruck

(a) Blauwale wiegen etwa 160 Tonnen und können bis zu 200 m tief tauchen. Welches Körpervolumen wäre optimal für einen Wal, sodass er in beliebiger Wassertiefe schweben kann?

(b) Das Volumen der Lunge eines Blauwals beträgt an der Wasseroberfläche etwa 5000 Liter. Luft besitzt eine hohe Kompressibilität, sodass $p \cdot V$ =const. gilt. Welches Volumen hätte dann die Lunge bei 200 m Tauchtiefe?

($\rho_{\text{Wasser}} = 1$ kg/l, Luftdruck auf Meeresniveau $p_0 = 101300$ Pa)

(Lösungswerte: (a) $V_{\text{Wal}} = 160$ m^3, (b) $V_{200m} \approx 245$ l)

Lösung:

(a) Die Auftriebskraft der Wals in Wasser ist $F_A = g \cdot m_{\text{verdrängt}} = g \cdot \rho_{\text{Wasser}} \cdot V_{\text{verdrängt}}$.
Der Wal ist völlig untergetaucht, also ist das verdrängte Wasservolumen $V_{\text{verdrängt}} = V_{\text{Wal}}$.
Ideal für Schweben in beliebiger Wassertiefe ist $F_A \stackrel{!}{=} F_G = g \cdot m_{\text{Wal}}$, also

$$g \cdot \rho_{\text{Wasser}} \cdot V_{\text{Wal}} \stackrel{!}{=} g \cdot m_{\text{Wal}}$$

$$\rightarrow \quad V_{\text{Wal}} = \frac{m_{\text{Wal}}}{\rho_{\text{Wasser}}} \approx \frac{160 \cdot 10^3 \text{ kg}}{1 \text{ kg/l}} \approx 160\,000 \text{ l} = 160 \text{ m}^3$$

(b) Es sind $V_0 = 5000$ l und $p_0 = 101300$ Pa, damit ist $p_0 \cdot V_0 \approx 5.065 \cdot 10^8$ Nm = const.
Der Schweredruck in $h = 200$ m Tauchtiefe beträgt $p_s = p_0 + \rho_{\text{Wasser}} \cdot g \cdot h$
Mit $p \cdot V$ =const. folgt also $p_s \cdot V_{200m} = p_0 \cdot V_0$ und damit

$$V_{200m} = \frac{p_0 \cdot V_0}{p_s} = \frac{p_0 \cdot V_0}{p_0 + \rho_{\text{Wasser}} \cdot g \cdot h}$$

Zahlenwerte eingesetzt (5000 l=5 m^3, 1 kg/l=1000 kg/m^3, Pa=N/m^2):

$$V_{200m} = \frac{101300 \text{ Pa} \cdot 5 \text{ m}^3}{101300 \text{ Pa} + 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 200 \text{ m}} \approx \frac{5.065 \cdot 10^5}{2.064 \cdot 10^6} \text{ m}^3 \approx 0.245 \text{ m}^3 = 245 \text{ l}$$

3. Schwingungen

Ein Federpendel werde ausgelenkt und schwinge leicht gedämpft. Mit welcher Eigenfrequenz f schwingt die Masse $m = 500$ g, wenn die Federkonstante $D = 20$ N/m beträgt? (Die "Eigenfrequenz" bezieht sich auf die dämpfungsfreie Schwingung.)
Wie lange dauert es, bis die Schwingungsamplitude auf die Hälfte abgefallen ist, wenn die Dämpfungskonstate $\delta = 0.02$ s^{-1} beträgt?
(Lösungswerte: $f \approx 1$ Hz, $T_{1/2} \approx 34.66$ s)

Lösung:
Für ein Federpendel gilt als Zusammenhang zwischen Kreiseigenfequenz ω, Pendelmasse m und Federkonstante D: $\quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
Die Eigenfrequenz f und die Kreiseigenfrequenz ω hängen zusammen gemäß: $f = \frac{\omega}{2\pi}$, sodass eingesetzt in obige Formel folgt

$$\rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \quad .$$

Zahlenwerte einsetzen ergibt
$\rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20\frac{\text{N}}{\text{m}}}{0.5 \text{ kg}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{40\frac{1}{\text{s}^2}} \approx 1 \text{ s}^{-1} = 1$ Hz.
Die Zeit, nach der die Schwingungsamplitude auf die Hälfte abgefallen ist, beträgt lt. Vorlesung

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\delta} = \frac{\ln(2)}{0.02\frac{1}{\text{s}}} \approx 34.66 \text{ s}$$

4. Hydro-/Aerodynamik

Ergänzen Sie folgende Aussagen physikalisch korrekt:

(a) Damit ein Vogel fliegen kann, muss die Luft oberhalb des Flügels ⋯⋯⋯⋯ als unterhalb des Flügels strömen.

(b) Wenn Flüssigkeit aus einem Rohr mit kleinem Querschnitt in ein Rohr mit größerem Querschnitt fließt, dann nimmt der statische Druck $\cdots\cdots\cdots\cdots$.

(c) Damit bei Verringerung des Rohrdurchmessers um 25% noch die gleiche Volumenstromstärke vorliegt, muss die Druckdifferenz um $\cdots\cdots\cdots\cdots$ % verändert werden.

(d) In einer viskosen Flüssigkeit sinkt eine $\cdots\cdots\cdots\cdots$ Kugel schneller als eine $\cdots\cdots\cdots\cdots$ Kugel.

(Lösungswerte: (a) schneller, (b) zu, (c) 316%, (d) große schneller als kleine)
(Hinweis: Diese Aufgaben sind speziell für die Studierenden der Tiermedizin konzipiert, um einen Aufgabentyp mit angemessenem Schwierigkeitsgrad für die Klausur zu erreichen. Bitte um Rückmeldung bei Übung!

Lösung:

(a) Antwort: schneller. Denn nach Bernoulli-Gleichung wächst mit steigender Strömungsgeschwindigkeit der dynamische Druck, während zugleich der statische Druck abnimmt. Der geringere statische Druck über dem Flügel verglichen mit dem statischen Druck unter dem Flügel erzeugt den dynamischen Auftrieb, damit der Vogel fliegen kann.

(b) Antwort: zu. Nach Kontinuitätsgleichung ist die Volumenstromstärke konstant. Damit sinkt beim Übergang vom kleinen zum großen Rohr die Strömungsgeschwindigkeit. Eine kleinere Strömungsgeschwindigkeit bedeutet einen geringeren dynamischen Druck, sodass der statische Druck ansteigen muss, damit die Bernoulli-Gleichung erfüllt wird.

(c) Antwort 316%. Nach Hagen-Poisseuille ist der Strömungswiderstand $R_s \propto \frac{1}{r^4}$. Damit der Volumenstrom $I = \frac{\Delta p}{R_s}$ =const. bleibt, muss also Δp in gleichem Maße anwachsen wie R_s, also für $r = r_0 - 25\% \cdot r_0 = 0.75 \cdot r_0$ wird

$$R_s = R_{s,0} \cdot \left(\frac{r_0}{0.75 \cdot r_0}\right)^4 \approx 3.16 \cdot R_0$$

. Damit muss die Druckdifferenz Δp um $3.16 \cdot 100\% = 316\%$ ansteigen.

(d) Antwort: große schneller als kleine. Nach Stokesschem Reibungsgesetz wächst die Sinkgeschwindigkeit mit dem Quadrat der Kugelradius.