

7. Übungsblatt

Besprechung: 05./07.12.2011

1. gedämpfte Schwingungen

Ein Federpendel werde ausgelenkt und schwingt leicht gedämpft. Mit welcher Eigenfrequenz f_0 schwingt die Masse $m = 500$ g, wenn die Federkonstante $D = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ beträgt? (Die "Eigenfrequenz" bezieht sich auf die dämpfungsfreie Schwingung.)

Wie lange dauert es, bis die Schwingungsamplitude auf die Hälfte abgefallen ist, wenn die Dämpfungskonstante $\gamma = 0.02 \text{ s}^{-1}$ beträgt? (Hinweis: Betrachten Sie die Einhüllende der Schwingung!)

(Lösungswerte: $f_0 \approx 1 \text{ Hz}$, $t_{1/2} \approx 34.66 \text{ s}$)

Lösung:

Lösungsansatz: "physikalisches Phänomen: gedämpfte Schwingung"

Nach Vorlesung ist die Eigenkreisfrequenz eines Federpendels: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Mit der Relation $\omega = 2\pi f$ zwischen Kreisfrequenz ω und Frequenz f folgt

$$\rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{20 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0.5 \text{ kg}}} \approx 1 \text{ Hz}$$

Die Dämpfung einer harmonischen Schwingung wird durch den Dämpfungsterm $e^{-\gamma t}$ in der Schwingungsformel $x(t) = e^{-\gamma t} \cdot A_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ beschrieben. Die Abnahme der Schwingungsamplitude auf die Hälfte bedeutet, dass

$$e^{-\gamma t_{1/2}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

wobei $t_{1/2}$ den zugehörigen Zeitpunkt angibt. Auflösen dieser Formel nach $t_{1/2}$:

$$\ln(e^{-\gamma t_{1/2}}) = -\gamma t_{1/2} = \ln(0.5) \rightarrow t_{1/2} = -\frac{\ln(0.5)}{\gamma} = \frac{\ln(2)}{\gamma}$$

Einsetzen ergibt

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{0.02 \frac{1}{\text{s}}} \approx 34.66 \text{ s}$$

2. Wellen

Ein Taucher hört einen Ton von 500 Hz. Welche Wellenlänge gehört dazu in Luft und welche in Wasser? (Schallgeschwindigkeit in Luft: 330 m/s, in Wasser: 1485 m/s)

(Lösungswerte: $\lambda_{\text{Luft}} = 0.66 \text{ m}$, $\lambda_{\text{Wasser}} = 2.97 \text{ m}$)

Lösung:

Lösungsansatz: "physikalisches Phänomen: Schallgeschwindigkeit"

Nach Vorlesung gilt: Schallgeschwindigkeit = Wellenlänge \times Frequenz, also $c = \lambda \cdot f$

$$\rightarrow \lambda = \frac{c}{f}$$

Mit $f = 500 \text{ Hz}$ folgt für:

$$\text{Luft mit } c = 330 \text{ m/s} \rightarrow \lambda = \frac{330 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{500 \text{ Hz}} = 0.66 \text{ m}$$

$$\text{Wasser mit } c = 1485 \text{ m/s} \rightarrow \lambda = \frac{1485 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{500 \text{ Hz}} = 2.97 \text{ m}$$

3. Akustik

(a) Eine Ultraschallwelle breitet sich durch Muskelgewebe (Impedanz $Z_M = 1.67 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$) aus und werde an einem Blutgefäß (Impedanz $Z_B = 1.60 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$) und am Knochen (Impedanz $Z_K = 6.66 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$) reflektiert. Welcher Bruchteil der ursprünglichen Intensität der Ultraschallwelle wird am Blutgefäß reflektiert? Welcher Bruchteil am Knochen?

(b) Wenn die Reflexion der Ultraschallwelle (Schallgeschwindigkeit im Blut $c = 1562 \text{ m/s}$) an einem Blutkörperchen geschieht, welches sich mit der Geschwindigkeit $v_B = 30 \text{ cm/s}$ durch das Blutgefäß in Richtung auf die Ultraschallquelle bewegt, um wie viel Prozent verändert sich die Frequenz

der reflektierten Ultraschallwelle?

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Situation aus Sicht des Blutkörperchens, dann aus Sicht des externen Beobachters!)

(Lösungswerte: (a) $R_B \approx 0.05\%$, $R_K \approx 35.88\%$, (b) 0.038%)

Lösung:

- (a) Lösungsansatz: "physikalisches Phänomen: Wellenreflektion"

Nach Vorlesung ist der Reflexionsfaktor: $R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2$

Einsetzen von $Z_1 = Z_M$ und $Z_2 = Z_B$ oder Z_K ergibt

für Blut: $R_B = \left(\frac{Z_B - Z_M}{Z_B + Z_M}\right)^2 = \left(\frac{1.60 \cdot 10^6 - 1.67 \cdot 10^6}{1.60 \cdot 10^6 + 1.67 \cdot 10^6}\right)^2 \approx 4.58 \cdot 10^{-4} \approx 0.05\%$

für Knochen: $R_K = \left(\frac{Z_K - Z_M}{Z_K + Z_M}\right)^2 = \left(\frac{6.66 \cdot 10^6 - 1.67 \cdot 10^6}{6.66 \cdot 10^6 + 1.67 \cdot 10^6}\right)^2 \approx 0.3588 \approx 35.88\%$

- (b) Lösungsansatz: "physikalisches Phänomen: Dopplereffekt"

Der Hinweis zeigt, dass die Lösung aus zwei Teilen besteht:

(1) Blutkörperchen läuft (als Beobachter) auf Schallquelle zu und

(2) Blutkörperchen reflektiert Schallwelle und wird zu neuer bewegter Schallquelle, die auf externen Beobachter zuläuft.

Nach Vorlesung ist für den hier beschriebenen Fall die beobachtete Frequenz: $f_B = f_0 \frac{1 + \frac{v_B}{v_Q}}{1 - \frac{v_{Ph}}{v_Q}}$

Dabei sind $v_Q = v_B$ die Geschwindigkeit des Blutkörperchens (als Quelle des reflektierten Schalls) und $v_{Ph} = c$ die Phasengeschwindigkeit der Ultraschallwelle. Die Frequenz f_0 der Ultraschallwelle ist nicht vorgegeben und wird auch nicht benötigt, weil nur die relative Änderung (in Prozent) der Frequenz f_B zur Frequenz f_0 gefragt ist, also

$$\rightarrow \frac{f_B}{f_0} = \frac{1 + \frac{v_B}{c}}{1 - \frac{v_{Ph}}{c}} = \frac{1 + \frac{0.30}{1562}}{1 - \frac{0.30}{1562}} \approx 1.00038$$

Die Frequenzänderung beträgt also 0.038% .

4. Schwingungen, Wellen, Akustik

Ergänzen Sie folgende Aussagen physikalisch korrekt:

- (a) Die Frequenzen eines schwingungsfähigen Systems mit Dämpfung haben die folgende Ordnung nach Größe der Frequenz:
 $\omega_{\text{res}} \dots \omega_{\text{gedämpft}}, \omega_{\text{res}} \dots \omega_{\text{ungedämpft}}, \omega_{\text{ungedämpft}} \dots \omega_{\text{gedämpft}}$.
- (b) Bewegt sich eine Schallquelle von einem Beobachter weg, so hört der Beobachter eine im Vergleich zur Schallquelle \dots Frequenz
- (c) Bei einer Schallwelle ist die Schwingung \dots zur Ausbreitungsrichtung der Welle.
- (d) Um die Überlagerung zweier Wellen zu berechnen, muss man Amplituden \dots .
- (e) Um die Intensität einer Welle zu berechnen, muss man \dots quadrieren.

(Lösungswerte: (a) $\omega_{\text{res}} < \omega_{\text{gedämpft}} < \omega_{\text{res}} < \omega_{\text{ungedämpft}}, \omega_{\text{ungedämpft}} > \omega_{\text{gedämpft}}$. (b) niedrigere, (c) parallel, (d) addieren, (e) die Amplitude)

Lösung:

- (a) Nach Vorlesung gilt $\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$, $\omega_{\text{gedämpft}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ und $\omega_{\text{ungedämpft}} = \omega_0$. Damit ist also $\omega_{\text{res}} \leq \omega_{\text{gedämpft}} \leq \omega_{\text{ungedämpft}}$.
- (b) Antwort: niedrigere. Beim Dopplereffekt gilt für eine sich mit v_Q entfernende Schallquelle $f'_B = f_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{v_Q}{v_{Ph}}}$ und damit $f'_B < f_0$.
- (c) Antwort parallel. Schallwellen sind longitudinale Wellen, da die periodischen Druckschwankungen in Ausbreitungsrichtung der Schallwelle oszillieren.
- (d) Antwort: addieren. Nach dem Superpositionsprinzip überlagern sich Wellen, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Die resultierende Amplitude ist die Summe aller Einzelamplituden.
- (e) Antwort: die Amplitude. Die Intensität einer Welle ist proportional zum Quadrat der Amplitude.