Quantenmechanik I
Wintersemester 2011/12
Aufgabenblatt 9 / Probeklausur
Abgabetermin: Freitag 13.1.2012 (bis 12 Uhr)

Abgabeort: Kästen in der Theresienstr. 37, 3. Stock

Termin der Klausur: Sa. 25.02.2012, Nachmittags
Termin der Nachholklausur: Di. 10.04.2012, Nachmittags
Es werden keine Hilfsmittel zugelassen. Die Aufgaben dieses Übungsblatts sollen einen Eindruck des Schwierigkeitsgrads der Klausur vermitteln. Versuchen Sie, die Aufgaben unter realistischen Bedingungen in 120 Minuten zu lösen.

QMI9.1: (5 Punkte) Die normierten Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ seien Eigenzustände des selbstadjungierten Operators $\hat{A}$ zu den Eigenwerten a_1 und a_2, wobei $a_1 \neq a_2$. Der Hamilton des Systems ist gegeben durch

$$H = \delta\,|1\rangle\langle 2| + \delta\,|2\rangle\langle 1|\;, \tag{1}$$

wobei δ eine reelle Zahl ist.

(a) Zeigen Sie das $|1\rangle$ und $|2\rangle$ keine Energieeigenzustände sind.

(b) Finden Sie die Energieeigenzustände $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$ und ihre Energieeigenwerte E_1 und E_2.

(c) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|1\rangle$. Leiten Sie einen Ausdruck für den Zustandsvektor im Schrödingerbild zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ ab und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, das System zu diesem Zeitpunkt im Zustand $|2\rangle$ vorzufinden.

(e) Kennen Sie eine konkretes physikalisches System, das mit diesem Modell vergleichbar ist? Geben Sie Parallelen an.

QMI9.2: (7 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m (in einer Raumdimension) sei einem Delta-Potential $V(x) = -\alpha\delta(x)$ ausgesetzt. α ist hierbei eine positive dimensionsbehaftete Größe.

(a) Stellen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in der Ortsdarstellung auf und integrieren Sie sie von $x = -\epsilon$ bis $+\epsilon$. Zeigen Sie durch den Grenzübergang $\epsilon \to 0$, dass die erste Ableitung der Eigenfunktion $\phi(x)$ an der Stelle $x = 0$ eine von α, m und $\phi(0)$ abhängende Unstetigkeit aufweist. Was muss hingegen für $\phi(x)$ an der Stelle $x = 0$ gelten?

(b) Nun sollen die gebundenen Zustände gefunden werden, also diejenigen mit Energie $E < 0$. Lösen Sie hierfür die Schrödinger-Gleichung für $x \neq 0$ und verwenden Sie die Anschlussbedingungen aus Teilaufgabe a). Beachten Sie, dass die Wellenfunktion normiert sein muss. Geben Sie die möglichen Energie-Eigenwerte und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen an. Wie viele gebundene Zustände gibt es also?

(c) Wie viele gebundene Zustände gäbe es für ein repulsives Delta-Potential, also für $\alpha < 0$?

(d) Berechnen Sie die Orts- und Impulsunschärfe $\langle(\Delta x)^2\rangle$ und $\langle(\Delta p)^2\rangle$ und überprüfen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation. (Hinweis: Für die Berechnung von $\langle p^2\rangle$ kann die Schrödinger-Gleichung hilfreich sein.)

QMI9.3: (8 Punkte) Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im unendlich tiefen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < x < a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte und zugehörigen normierten Wellenfunktionen.

(b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System in einer Überlagerung aus dem Grundzustand $|\phi_1\rangle$ und dem ersten angeregten Zustand $|\phi_2\rangle$:

$$\Psi(x, t = 0) = N\left(\phi_1(x) + \phi_2(x)\right) \tag{3}$$

Bestimmen Sie die Normierungskonstante N und skizzieren Sie $|\Psi(x, t = 0)|^2$.

(c) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ sowie ihr Betragsquadrat zur Zeit t. Drücken Sie dabei $|\Psi(x, t)|^2$ unter Verwendung der Frequenz $\omega = \pi^2\hbar/2ma^2$ aus.

(d) Berechnen Sie den Orts-Erwartungswert als Funktion der Zeit. Mit welcher Frequenz und mit welcher Amplitude oszilliert dieser? Vergleichen Sie mit der Amplitude eines klassischen Teilchens im Potentialtopf und interpretieren Sie.

Hinweis: Verwenden Sie, dass der Erwartungswert von $x - \frac{a}{2}$ aus Symmetriegründen in jedem stationären Zustand ϕ_n verschwindet, sowie das folgende Integral:

$$\int_0^\pi x \sin(x) \sin(2x) \mathrm{d}x = -\frac{8}{9} \tag{4}$$

(e) Nun werde die Energie gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man welchen Wert? Was ist der Erwartungswert der Energie?

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2012!