Quantenmechanik I
Wintersemester 2011/12
Aufgabenblatt 1
Abgabetermin: Freitag 4.11.2011

QMI1.1: In der Vorlesung haben wir den Versuch von Stern und Gerlach qualitativ besprochen. In dieser Aufgabe sollen Sie inspiriert werden, ein paar Grundelemente davon gedanklich zu verfeinern.

Nehmen Sie an, ein Zustand $|+\rangle$, beschrieben durch den Spaltenvektor $(1,0)^T$, repräsentiert ein Teilchen mit der Eigenschaft: Spin–Projektion entlang der z–Achse Ihres Labors ist gleich $+1/2$. Das Teilchen kann sonst auch noch im Zustand $|-\rangle$, beschrieben durch den Spaltenvektor $(0,1)^T$, vorliegen, was bedeutet: es hat eine Spin–Projektion $-1/2$ entlang der z–Achse Ihres Labors.

(a) Wie erreichen Sie, daß nur diese zwei Zustände möglich sind?

(b) Finden Sie eine Matrix S_z, die die Spin–Projektion entlang der z–Achse repräsentiert, so daß $S_z|+\rangle = +(1/2)|+\rangle$ und $S_z|-\rangle = -(1/2)|-\rangle$ gilt.

Zeigen Sie, daß die zu S_z zugeordnete Matrix selbstadjungiert (Hermitesch) ist. Warum ist das wichtig?

(c) Gegeben seien die Matrizen

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Interpretieren Sie die Wirkung dieser Matrizen auf die Spaltenvektoren, die $|+\rangle$ und $|-\rangle$ darstellen.

Sind diese Matrizen selbstadjungiert (Hermitesch) und welche Konsequenz hat Ihre Antwort?

(d) Finden Sie eine Matrixdarstellung von $|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|$, $|+\rangle\langle-|$ und $|-\rangle\langle+|$.

QMI1.2: Nun wollen wir die experimentellen Beobachtungen im Stern-Gerlach Versuch dazu nutzen, die Matrizen S_y und S_z (dargestellt in der z-Basis aus Aufgabe 1.1) zu bestimmen. Dazu können Sie wie folgt vorgehen:

(a) Der Zustand, dessen Spin-Projektion auf die x-Achse $+1/2$ bzw. $-1/2$ ist, werde mit $|+_x\rangle$ bzw. $|-_x\rangle$ bezeichnet. Stellen Sie die Matrix S_x durch die Projektionsoperatoren $|+_x\rangle\langle+_x|$ und $|-_x\rangle\langle-_x|$ dar.

(b) Welche Konsequenz hat die Beobachtung, dass ein Teilchen im Zustand $|+_x\rangle$ bei Messung der Spin Komponente in z-Richtung mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte $+1/2$ und $-1/2$ ergibt, für den numerischen Wert von $|\langle+|+_x\rangle|$ und $|\langle-|+_x\rangle|$? Nutzen Sie dies, um den Vektor $|+_x\rangle$ in der z-Basis zu entwickeln und nutzen Sie die Freiheit eines beliebigen globalen Phasenfaktors, um etwa die $|+\rangle$-Komponente reell zu wählen. (Ihr Ergebnis sollte dann noch einen freien Parameter enthalten.)

Gehen Sie analog für $|-_x\rangle$ vor.

(c) Was impliziert der experimentelle Befund, dass die Messung des Spins in x-Richtung bei einem Teilchen im Zustand $|+_x\rangle$ niemals $-1/2$ ergibt, für das Skalarprodukt $\langle+_x|-_x\rangle$? Verwenden Sie dies, um einen der freien Parameter von $|\pm_x\rangle$ zu eliminieren.

(d) Wiederholen Sie die Schritte (a) bis (c) für die y-Richtung.

(e) Da der Stern-Gerlach Versuch in jede andere beliebige Richtung aufgebaut werden kann, ohne die physikalischen Beobachtungen zu verändern, gilt die Argumentation von Teil (b) auch für die Skalarprodukte $\langle\pm_y|\pm_x\rangle$. Leiten Sie daraus eine Beziehung der übrigen 2 freien Parameter her.

(f) Diese Beziehung impliziert, dass S_x und S_y nicht beide reell sein können. Wählen Sie schließlich die Konvention, dass die Matrix S_x reell ist (dies kann durch eine Phasen-Wahl von $|\pm\rangle$ immer erreicht werden), und geben Sie S_x und S_y explizit in Matrixnotation an.