Quantenmechanik I
Wintersemester 2011/12
Aufgabenblatt 10
Abgabetermin: Freitag 20.01.2012 (bis 12 Uhr)

Abgabeort: Kästen in der Theresienstr. 37, 3. Stock

QMI8.1: (7 Punkte) In der Vorlesung wurde der eindimensionale harmonische Oszillator besprochen. Die stationären Zustände $|n\rangle$ können durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren dargestellt werden.

(a) Berechnen Sie $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$, Δx und Δp für den Zustand $|n\rangle$.

(b) Wird die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt? Was fällt Ihnen im Falle des Grundzustandes auf?

(c) Berechnen Sie die Erwartungswerte der kinetischen und potentiellen Energie für den Zustand $|n\rangle$. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem klassischen Ergebnis.

QMI8.2: (4 Punkte) Betrachten Sie den Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen bei einer Ortsmessung im klassisch verbotenen Bereich zu finden (also in dem Bereich, den das klassische Teilchen mit der Grundzustandsenergie des quantenmechanischen HO nicht erreichen kann).

[Hinweis: Um ein numerisches Ergebnis zu erhalten, benötigen Sie den Wert der Fehlerfunktion $\mathrm{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ an der Stelle $x = 1$: $\mathrm{erf}(1) = 0,8427008\ldots$]

QMI8.3: (9 Punkte) Betrachten Sie ein Teilchen mit der Ladung q in einem 1-dimensionalen harmonischen Potential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2$. Zusätzlich soll ein schwaches elektrisches Feld E eingeschaltet werden.

(a) Stellen Sie den Hamiltonoperator für dieses System auf.

(b) Bestimmen Sie die Eigenenergien und drücken Sie die Eigenfunktionen durch die des unverschobenen harmonischen Oszillators (für den $E = 0$ gilt) aus.

(c) Definieren Sie Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(ip + m\omega x) + \gamma \quad (1)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-ip + m\omega x) + \gamma \quad (2)$$

unter geeigneter Wahl von γ, so dass sich die Eigenwerte des Hamilton direkt ablesen lassen.

(d) Berechnen Sie den Erwartungswert des elektrischen Dipolmoments $D = qx$ für die Energieeigenfunktionen.