Quantenmechanik I
Wintersemester 2011/12
Aufgabenblatt 11
Abgabetermin: Freitag 27.01.2012 (bis 12 Uhr)

Abgabeort: Kästen in der Theresienstr. 37, 3. Stock

QMI11.1: (10 Punkte) Betrachten Sie einen dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator, also ein Potential der Form $V(\vec{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}^2$.

(a) Stellen Sie den Hamilton-Operator auf und definieren Sie geeignete Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, analog zum eindimensionalen Fall; geben Sie die zugehörigen Kommutator-Relationen an.

(b) Konstruieren Sie damit die Energie-Eigenzustände und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

(c) Wie ist die Entartung des n. angeregten Zustands? Gibt es nicht-entartete Eigenzustände?

(d) Bestimmen Sie den Grundzustand in der Ortsdarstellung.

QMI11.2: (10 Punkte) Betrachten Sie das folgende eindimensionale Kastenpotential: $V(x) = V_0 > 0$ für $|x| \leq a$ und $V(x) = 0$ für $|x| \geq a$. Es werden die Lösungen der Energieeigenwertgleichung $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ gesucht, wobei $E > V_0$ gelten soll.

(a) Stellen Sie die allgemeine Lösung der Energieeigenwertgleichung in allen drei Raumbereichen auf.

(b) Die allgemeine Lösung in jedem Raumbereich setzt sich aus der Superposition von zwei Grundlösungen zusammen. Erläutern Sie, warum eine der beiden Lösungen dem Teilchenfluss in die positive x-Richtung entspricht, während die andere Lösung Teilchen beschreibt, die in die negative x-Richtung propagieren. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichten, die zu diesen Teilchenflüssen gehören.

(c) Im Folgenden soll ein konstanter Teilchenfluss von $x = \infty$ auf das Potential einfallen. Welche Vereinfachung erlaubt dieser Aufbau für die Lösung im Raumbereich $x > a$?

(d) Bestimmen Sie die Anschlussbedingungen zwischen allen drei Raumbereichen.

(e) Begründen Sie, warum $T = \frac{|j^3_{auslaufend}|}{|j^1_{einlaufend}|}$ dem Transmissionskoeffizienten und $R = \frac{|j^1_{auslaufend}|}{|j^1_{einlaufend}|}$ dem Reflektionskoeffizienten entspricht. $j^1_{einlaufend}$ ist hierbei die Wahrscheinlichkeitsstromdichte des einfallenden Teilchenflusses im Raumbereich $x < -a$, $j^1_{auslaufend}$ die Wahrscheinlichkeitsstromdichte des reflektierten Teilchenflusses im Raumbereich $x < -a$ und $j^3_{auslaufend}$ die Wahrscheinlichkeitsstromdichte des transmittierten Teilchenflusses im Raumbereich $x > a$.

Berechnen Sie T und R. Welche Relation ist zwischen Transmissionskoeffizient und Reflektionskoeffizient gegeben? (Ergebnis zur Orientierung: $T = \frac{(2k_1k_2)^2}{(k_1^2-k_2^2)^2 \sin^2(2k_2a)+(2k_1k_2)^2}$, wobei k_1 und k_2 die Wellenzahlen in den Bereichen $|x| > a$ und $|x| \leq a$ sind.)

Referatvorschlag: Stellen Sie die Definition und relevanten Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen vor. (20 Punkte)