Quantenmechanik I
Wintersemester 2011/12
Aufgabenblatt 11
Abgabetermin: Freitag 27.01.2012 (bis 12 Uhr)

Abgabeort: Kästen in der Theresienstr. 37, 3. Stock

QMI11.1: (3 Punkte) Berechnen Sie den Bahndrehimpulsoperator $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{L}^2$ und die Leiteroperatoren $L_\pm = L_1 \pm iL_2$ in Kugelkoordinaten.

QMI11.2: (3 Punkte) Berechnen Sie die Generatoren M_1, M_2 und M_3 der $SO(3)$ für Drehungen entlang der x-, y-, und z-Achse. Gehen Sie von den zugehörigen endlichen Rotationen O_i, d.h. $O_i = 1 - i\alpha M_i + \ldots$ für einen kleinen Winkel α, aus. Zeigen Sie explizit, dass die M_i die Drehimpulsalgebra $[M_i, M_j] = i\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} M_k$ erfüllen.

QMI11.2: (6 Punkte) Ein Spin-1/2-Teilchen der Masse m und Ladung e in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ wird durch den Hamiltonoperator $H = -\frac{e}{mc}\vec{S}\cdot\vec{B}$ beschrieben. Der Vektor $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)^T$ bezeichne die Spinoperatoren aus Aufgabe 2.3. Das B-Feld sei in z-Richtung orientiert $\vec{B} = B\ \hat{e}_z$.

(a) Finden Sie den Ausdruck für den Zeitentwicklungsoperator und vergleichen Sie ihn mit dem Operator für endliche Drehungen im Spinorraum. Identifizieren Sie die zeitliche Abhängigkeit des Drehwinkels. Verwenden Sie hierzu die Definition $\omega = \frac{eB}{mc}$.

(b) Die Erwartungswerte der Spinoperatoren seien zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle S_x\rangle(t)$, $\langle S_y\rangle(t)$, $\langle S_z\rangle(t)$. Verwenden Sie hierzu die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel und die Tatsache, dass die Spinoperatoren die Drehimpulsalgebra aus Aufgabe 11.2 erfüllen.

(c) Um welches physikalische Phänomen handelt es sich hierbei? Kennen Sie ein klassisches System, das ein ähnliches Verhalten aufweist?

(d) Berechnen Sie die Periodendauer T in Bezug auf den Erwartungswert. Es gilt also $\langle S_x\rangle(T) = \langle S_x\rangle(0)$. Gilt dies auch für einen Zustandsvektor nach der Zeit T?

QMI12.4: (8 Punkte)

Die Kugelfläechenfunktionen Y_l^m ($l \in \mathbb{N}_0, m = -l, -l+1, \ldots, l$) sind die orthonormalen Eigenfunktionen des Winkelanteils des Laplace-Operators (mit Eigenwert $-l(l+1)$). Sie lassen sich in folgender Form darstellen:

$$Y_l^m(\theta,\phi) = N_l^m P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi} \qquad (m \geq 0) \tag{1}$$

$$Y_l^m(\theta,\phi) = (-1)^m \overline{Y_l^{-m}(\theta,\phi)} \qquad (m < 0) \tag{2}$$

Hier bezeichnet N_l^m eine Normierungskonstante und P_l^m die zugeordneten Legendre-Polynome, welche sich aus den Legendre-Polynomen P_l wie folgt konstruieren lassen:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x) \qquad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2-1\right)^l.$$

Diese erfüllen die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \qquad \int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'}.$$

(a) Jede auf dem Intervall $[-1,1]$ quadratintegrable Funktion lässt sich auf eindeutige Weise nach Legendre-Polynomen entwickeln. Bestimmen Sie allgemein die Koeffizienten c_n einer solchen Darstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ und stellen Sie $g(x) = 5x^3 - 9x^2 + 4x + 1$ explizit in dieser Basis dar.

(b) Zeigen Sie, dass die Y_l^m ein Orthonormalsystem bilden und bestimmen Sie hierfür N_l^m.

(c) Ebenso lassen sich nun quadratintegrable Funktionen auf der Einheitskugel nach den Kugelflächenfunktionen entwickeln. Berechnen Sie Y_l^m für $l = 0, 1, 2$ und geben Sie die Entwicklungskoeffizienten für $h(\theta,\phi) = 1 + \cos\theta + (\sin\theta)^2\cos(2\phi)$ an.