Quantenmechanik I
Wintersemester 2011/12
Aufgabenblatt 2
Abgabetermin: Freitag 11.11.2011 (bis 12 Uhr)
Abgabeort: Kästen in der Theresienstr. 37, 3. Stock

QMI2.1: (6 Punkte)

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass ein Ket-Vektor $|\alpha\rangle$ in einer Orthonormal-Basis $|a^j\rangle$ durch einen Spaltenvektor mit Komponenten $\langle a^j|\alpha\rangle$ dargestellt werden kann, und ein Operator X durch ein Matrix mit Komponenten $\langle a^i|X|a^j\rangle$. Nun wollen wir eine entsprechende Darstellung für Bra-Vektoren (duale Vektoren) finden.

Betrachten Sie dazu den Bra-Vektor $\langle\gamma| = \langle\alpha|X$ und übersetzen Sie diese Gleichung in die Matrix-Schreibweise. Durch welche Art von Vektor wird ein Bra also dargestellt, und wie hängen seine Komponenten mit denen des zugehörigen Kets zusammen?

Stellen Sie außerdem das Skalarprodukt $\langle\alpha|\beta\rangle$ sowie den Operator $|\alpha\rangle\langle\beta|$ in Matrixschreibweise dar.

QMI2.2: (4 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik vertiefen.

(a) Gibt es Zustände, bei denen die Übergangswahrscheinlichkeit bei einer Messung gleich 0 oder 1 ist? Wenn ja, wie sehen solche Zustände aus?

(b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert einer Observablen im Allgemeinen nicht gleich einem Eigenwert ist. Gibt es hiervon Ausnahmen?

QMI2.3: (5 Punkte)

Auf dem letzten Übungsblatt haben Sie die Matrix Darstellung der Spin-Operatoren (die sogenannten 'Pauli-Matrizen') abgeleitet:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die Pauli Matrizen die Drehimpulsalgebra

$$[S_i, S_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk} S_k \tag{2}$$

erfüllen. Zeigen Sie auerdem, dass

$$[\vec{S}^2, S_i] = 0 \ , \tag{3}$$

wobei $\vec{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ ist. Was sind die physikalischen Konsequenzen der Kommutatorrelationen (2) und (3)?

QMI2.4: (5 Punkte)

Betrachten Sie zwei kompatible Observable A und B, d.h. $[A, B] = 0$. Eine Messung der Observablen A ergebe den Wert a, eine direkt darauf folgende Messung der Observablen B den Wert b. Stellen Sie den Zustand sowohl nach der Messung von A als auch von B in einer geeigneten Basis dar (beachten Sie, dass die Eigenwerte a und b möglicherweise entartet sind).

Welchen Wert würden Sie bei einer zweiten Messung der Observablen A erhalten? Wie beschreiben Sie die sich daraus ergebende physikalische Implikation der Kompatibilität von A und B?