Quantenmechanik I
Wintersemester 2011/12
Aufgabenblatt 4
Abgabetermin: Freitag 25.11.2011 (bis 12 Uhr)

Abgabeort: Kästen in der Theresienstr. 37, 3. Stock

QMI4.1: (3 Punkte) Wir definieren den Operator $\Delta A = A - \langle A \rangle$, wobei $\langle A \rangle = \langle \gamma | A | \gamma \rangle$ den Erwartungswert des Operators A bezüglich eines beliebigen physikalischen Zustands $|\gamma\rangle$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass für die Varianz $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ folgende Relationen gelten:

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \tag{1}$$

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \geq 0 \tag{2}$$

(b) Sei A eine Observable. Ist $(\Delta A)^2$ beobachtbar?

QMI4.2: (3 Punkte) Seien $\{|\alpha^{(i)}\rangle\}$ und $\{|\beta^{(i)}\rangle\}$ zwei verschiedene Orthonormalbasen eines Hilbertraums $\mathcal{H}$, $i \in \{1 \ldots \dim(\mathcal{H})\}$. Die Matrix U beschreibe den zugehörigen Basiswechsel

$$|\alpha^{(i)}\rangle = \sum_j U_{ij} |\beta^{(j)}\rangle \ . \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass U unitär ist. Warum ist diese Eigenschaft für die quantenmechanische Interpretation wichtig?

QMI4.3: (6 Punkte) Wir definieren die Spur eines Operators B als

$$tr(B) = \sum_i = \langle \alpha^{(i)} | B | \alpha^{(i)} \rangle \text{ und } i \in \{1 \ldots \dim(\mathcal{H})\} \tag{4}$$

wobei $\{|\alpha^{(i)}\rangle\}$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $\mathcal{H}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Spur wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl der Basis. Verwenden sie dazu eine weitere Orthonormalbasis $\{|\beta^{(i)}\rangle\}$.

(b) Beweisen Sie unter Verwendung der beiden Basen $\{|\alpha^{(i)}\rangle\}$ und $\{|\beta^{(i)}\rangle\}$ folgende Eigenschaften der Spur:

$$tr(A\,B) = tr(B\,A) \tag{5}$$

$$tr(U^\dagger A\,U) = tr(A) \qquad U \text{ unitär} \tag{6}$$

$$tr(|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(j)}|) = \delta_{ij} \tag{7}$$

$$tr(|\alpha^{(i)}\rangle\langle\beta^{(j)}|) = \langle\beta^{(j)}|\alpha^{(i)}\rangle \tag{8}$$

QMI4.4: (4 Punkte) Diese Aufgabe soll das Grundprinzip aus Aufgabe 3.2 näher verdeutlichen. Betrachten Sie wiederum drei Stern-Gerlach Apparaturen die folgendermassen eingerichtet sind:

Die erste Apparatur lässt nur Atome passieren deren Spin in positiver z-Achse ausgerichtet sind.

Die zweite Apparatur ist entlang des Vektors $\mathbf{\hat{n}}$ ausgerichtet, welcher in der xz-Ebene liegt und einen Winkel β mit der z-Achse einschließt. Auch diese Apparatur lässt nur Atome mit positiver Spinausrichtung passieren.

Die dritte Apparatur ist wiederum entlang der z-Achse ausgerichtet, lässt aber nur Spins mit negativer Spinausrichtung passieren.

Wie groß ist die Strahlungsintensität nach Passieren der dritten Apparatur (bezgl. der Intensität des Strahls hinter der ersten Apparatur)? Wie müssen Sie den Winkel β wählen um die Intensität zu maximieren?

QMI4.5: (4 Punkte) Ein Spin $\frac{1}{2}$ System befinde sich im Eigenzustand des Operators $\vec{S}\cdot\hat{n}$ mit Eigenwert $+\hbar/2$, wobei $\hat{n}$ einen Einheitsvektor bezeichne, der in der xz-Ebene liegt und mit der positiven z-Achse einen Winkel γ einschließt.

(a) Es werde nun S_x gemessen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, $+\hbar/2$ zu bekommen?

(b) Berechnen Sie die Varianz von S_x (wie in Aufgabe 4.1 definiert) bezüglich des Ausgangszustands.

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse zum Konsistenz-Check für die Spezialfälle $\gamma = 0, \pi/2$ und π.