Quantenmechanik I
Wintersemester 2011/12
Aufgabenblatt 5
Abgabetermin: Freitag 02.12.2011 (bis 12 Uhr)

Abgabeort: Kästen in der Theresienstr. 37, 3. Stock

Referatvorschlag: (40 Punkte) kanonische Quantisierung, grundlegende Strukturen der symplektischen Mechanik und ihre Realisierung in der QM.

QMI5.1: (2 Punkte) In der Vorlesung haben Sie die Ortsraumdarstellung des Impulsoperators kennengelernt. Zeigen Sie, dass folgende Verallgemeinerung gilt:

$$\langle x|p^n|\alpha\rangle = (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}\langle x|\alpha\rangle \tag{1}$$

QMI5.2: (8 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Heisenbergsche Unschärferelation für ein Gauß'sches Wellenpaket bestätigt werden. Das Wellenpaket $|\alpha\rangle$ ist in der Ortsdarstellung gegeben durch

$$\langle x|\alpha\rangle = \frac{1}{(\pi d^2)^{1/4}} \exp\left(ikx - \frac{x^2}{2d^2}\right) \ . \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert des Ortsoperators $\langle x\rangle = 0$ gilt.

(b) Berechnen Sie unter Zuhilfenahme von Aufgabe 4.1 die Varianz $\langle(\Delta x)^2\rangle$ und verwenden Sie die Ortsraumdarstellung des Impulsoperators aus Aufgabe 5.1 um $\langle(\Delta p)^2\rangle$ zu berechnen.

(c) Bestätigen Sie für diesen Zustand die Heisenbergsche Unschärferelation. Was zeichnet das Gauß'sche Wellenpaket aus?

QMI5.3: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die (normierten) Spin-$\frac{1}{2}$ Zustände, für die das Unschärfe-Produkt

$$\langle(\Delta S_x)^2\rangle\langle(\Delta S_y)^2\rangle \tag{3}$$

minimal bzw. maximal wird. Überprüfen Sie explizit, dass für diese Zustände die Unschärfe Relation für S_x und S_y nicht verletzt ist.

QMI5.4: (2 Punkte)

Finden Sie die normierten Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenwerte für folgende Observable:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Gibt es hier eine Entartung?

[Bemerkung: Diese Matrix ist (bis auf einen Faktor $\hbar$) eine Darstellung der Spin-1 S_x Matrix.]

QMI5.5: (2 Punkt)

A und B seien zwei Observable, für die ein *vollständiger* orthonormaler Satz von gemeinsamen Eigenvektoren $\{|a^{(i)}, b^{(j)}\rangle\}$ existiert. Können wir daraus

$$[A, B] = 0 \tag{5}$$

schließen? Falls ja, geben Sie einen Beweis, falls nein ein Gegenbeispiel an.