Quantenmechanik I
Wintersemester 2011/12
Aufgabenblatt 6
Abgabetermin: Freitag 09.12.2011 (bis 12 Uhr)

Abgabeort: Kästen in der Theresienstr. 37, 3. Stock

QMI6.1: (8 Punkte)

Ein Teilchen mit der Masse m bewege sich in einem Würfel-Potential $V(x,y,z)$ mit den Eigenschaften $V(x,y,z) = 0$ für Koordinaten innerhalb des Würfels $-L < x, y, z < L$ und $V(x,y,z) = \infty$ für Koordinaten außerhalb des Würfels.

(a) Stellen Sie den Hamiltonoperator für dieses System auf.

(b) Formulieren Sie die Schrödingergleichung in Ortsdarstellung. Verwenden Sie für die Zustände $|\Psi\rangle$ die Notation $\Psi(\vec{x}, t) = \langle \vec{x} | \Psi \rangle$ und benutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 5.1.

(c) Separieren Sie die Zeitabhängigkeit mit dem Ansatz $\Psi(\vec{x}, t) = \exp(-iEt/\hbar)\Psi(\vec{x})$ ab. Woher kennen Sie die entstandene Gleichung für $\Psi(\vec{x})$? Unter welchen Voraussetzungen lässt sich die Zeitabhängigkeit so einfach abspalten?

(d) Welche Bedingung muss $\Psi(\vec{x})$ am Rand des Würfels erfüllen?

(e) Lösen Sie die Schrödingergleichung mit dem Separationsansatz $\Psi(\vec{x}) = \phi_1(x)\phi_2(y)\phi_3(z)$. Worin äußert sich hinsichtlich der Energie der Unterschied zur klassischen Mechanik?

(f) Zeigen Sie explizit, dass die Energieeigenfunktionen $\Psi_n(\vec{x})$ ein Orthonormalsystem bilden.

QMI6.2: (6 Punkte)

Betrachten Sie ein quantenmechanisches System im zweidimensionalen Hilbertraum mit Orthonormalbasis

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Der Hamiltonoperator habe in dieser Basis folgende Gestalt:

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon & g \\ g & \epsilon \end{pmatrix}, \quad (\epsilon, g \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

(a) Welche Werte können bei einer Messung der Energie beobachtet werden, und in welchem Zustand befindet sich das System jeweils nach dieser Messung?

(b) Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung für die Anfangsbedingung $|\Psi(t=0)\rangle = |1\rangle$ und geben Sie $|\Psi(t)\rangle$ explizit an.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System bei einer Messung im Zustand $|2\rangle$ zu finden, als Funktion von t und überprüfen Sie explizit, dass die Norm von $|\Psi\rangle$ erhalten bleibt.

(Bemerkung: Dieses Modell dient zum Beispiel zur Beschreibung von Neutrino-Oszillationen.)

QMI6.3: (6 Punkte)

Zeigen Sie für die Exponentialfunktion folgende Aussagen:

(a) Für kommutierende Operatoren ($[A, B] = 0$) gilt:

$$e^A e^B = e^{A+B}. \tag{3}$$

(b) Für die Pauli-Matrix σ_x gilt

$$e^{i\alpha\sigma_x} = \mathbb{1}\cos(\alpha) + i\sigma_x \sin(\alpha), \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

(Für die Definition der Pauli-Matrizen siehe Aufgabe 2.3., bis auf Faktor $\hbar/2$.)

(c) Verallgemeinern Sie diese Aussage für $e^{i\alpha\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}$, wobei $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ einen beliebigen Einheitsvektor bezeichnet.