Quantenmechanik I
Wintersemester 2011/12
Aufgabenblatt 7
Abgabetermin: Freitag 16.12.2011 (bis 12 Uhr)

Abgabeort: Kästen in der Theresienstr. 37, 3. Stock

QMI7.1: (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $[\hat{x}_i, \hat{p}_j^n] = \delta_{ij} n i\hbar \hat{p}_j^{n-1}$, und $[\hat{p}_i, \hat{x}_j^n] = -\delta_{ij} n i\hbar \hat{x}_j^{n-1}$.

(b) Sei $F(\vec{x}, \vec{p})$ eine analytische Funktion. Zeigen Sie, dass $[\hat{x}_i, F(\hat{x}_j, \hat{p}_k)] = i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{p}_i} F(\hat{x}_j, \hat{p}_k)$ und $[\hat{p}_i, F(\hat{x}_j, \hat{p}_k)] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} F(\hat{x}_j, \hat{p}_k)$ gilt.

QMI7.2: (9 Punkte)

(a) Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich in drei Dimensionen mit Potential $V(\vec{x})$ bewegt, dessen Hamiltonoperator also gegeben ist durch

$$H = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{x}}). \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass für die Zeitableitung der Erwartungswerte von $\hat{\vec{x}}$ und $\hat{\vec{p}}$ das Ehrenfest Theorem gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\vec{x}}\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{\vec{p}}\rangle \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\vec{p}}\rangle = -\langle\vec{\nabla}V(\hat{\vec{x}})\rangle \tag{3}$$

Erfüllt der Orts-Erwartungswert also im Allgemeinen die klassischen Bewegungsgleichungen? Diskutieren Sie außerdem, ob es genügt, statt der Schrödinger-Gleichung die Ehrenfest-Gleichungen zu verwenden, um quantenmechanische Systeme zu behandeln.

(b) Betrachten Sie nun als Beispiel ein eindimensionales System mit linearem Potential $V(x) = -ax \quad (a > 0)$.

Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Orts-Erwartungswert und vergleichen Sie mit dem klassischen Ergebnis. Berechnen Sie zudem die Impulsunschärfe als Funktion der Zeit.

QMI7.3: (2 Punkte) Bezeichne $T(\vec{a})$ räumliche Translationen mit Translationsparameter $\vec{a}$, deren unitäre Darstellung im Hilbertraum $U(T(\vec{a}))$ sei.

(a) Berechnen Sie $U^\dagger(T(\vec{a}))\,\hat{\vec{x}}\,U(T(\vec{a}))$.

(b) Interpretieren Sie den obigen Operator und Ihr Ergebnis.

QMI7.4: (6 Punkte) In der Vorlesung wurde das Heisenbergbild (H.-B.) eingeführt, in dem die Operatoren die Zeitabhängikeit tragen und die Zustandsvektoren zeitunabhängig sind. In Abgrenzung hierzu sind im Schrödingerbild (S.-B.) die Operatoren zeitunabhängig, während die Zustandsvektoren mit der Zeit variieren. In dieser Aufgabe soll besprochen werden, wie sich die Basiszustände in beiden Bildern verhalten. Wir betrachten eine Basis aus Eigenvektoren $|\alpha^{(i)}\rangle$ zum Operator $A^{(S)}$ im S.-B., $i \in \{1 \ldots \dim(\mathcal{H})\}$:

$$A^{(S)}|\alpha^{(i)}\rangle = \alpha^{(i)}|\alpha^{(i)}\rangle \tag{4}$$

(a) Besitzt der Basisvektor im S.-B. $|\alpha^{(i)}\rangle$ eine Zeitabhängigkeit?

(b) Zeigen Sie, dass der Vektor $|\alpha^{(i)}, t\rangle_H \equiv U^\dagger(t,0)|\alpha^{(i)}\rangle$ ein Eigenvektor zu $A^{(H)}(t)$ ist. Der unitäre Operator $U^\dagger(t, t_0 = 0)$ ist der bekannte Zeitentwicklungsoperator. Diese Vektoren werden folglich als die Basisvektoren im H.-B. gewählt.

(c) Ist diese Basiswahl konsistent mit der Definition von $A^{(H)}(t)$? Entwickeln Sie hierfür $A^{(H)}(t)$ in der neu eigeführten Basis $\{|\alpha^{(i)}, t\rangle_H\}$.

(d) Zeigen Sie, dass $|\alpha^{(i)}, t\rangle_H$ die 'Schrödingergleichung mit falschem Vorzeichen' erfüllt.

(e) Betrachten Sie ein System, welches sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im Eigenzustand $|\alpha^{(j)}\rangle = |\alpha^{(j)}, t = 0\rangle_H$ des Operator $A^{(S)}$ befindet. Berechnen Sie sowohl im H.-B. als auch im S.-B. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das System nach der Zeit t im Eigenzustand $|\beta^{(k)}\rangle$ des Operators $B^{(S)}$ befindet. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse.