Quantenmechanik I
Wintersemester 2011/12
Aufgabenblatt 8
Abgabetermin: Freitag 23.12.2011 (bis 12 Uhr)

Abgabeort: Kästen in der Theresienstr. 37, 3. Stock

QMI8.1: (3 Punkte) Betrachten Sie die Theorie eines freien Teilchens der Masse m, welches durch den Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/2m$ beschrieben wird. $\hat{x}_i^{(H)}(t)$ bezeichne den Ortsoperator im H.-B., insbesondere gilt $\hat{x}_i^{(H)}(t_0) = \hat{x}_i^{(S)}$.

(a) Benutzen Sie die Heisenberg-Bewegungsgleichung, um $\hat{x}_i^{(H)}(t)$ zu bestimmen. Zeigen Sie, dass der Impulsoperator eine Konstante der Bewegung ist, also $\hat{p}_i^{(H)}(t) = \hat{p}_i^{(H)}(t_0)$ gilt.

(b) Berechnen sie $\left[\hat{x}_i^{(H)}(t), \hat{x}_j^{(H)}(t_0)\right]$. Was bedeutet dieses Ergebnis für die Unbestimmtheit des Aufenthaltsortes des Teilchens?

(c) Was ergibt der Kommutator im Grenzfall $m \gg \hbar(t - t_0)$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

QMI8.2: (1 Punkt) Betrachten Sie ein klassisches mechanisches System, das durch verallgemeinerte Koordinaten q beschrieben wird. Eine Gleichgewichtslage des Systems ist definiert als eine zeitunabhängige Lösung der Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass $q = q_0$ (= const.) genau dann eine Gleichgewichtslage ist, wenn q_0 ein Extremum der potentiellen Energie ist.

QMI8.3: (3 Punkte) Gegeben sei die Lagrange-Funktion eines klassischen mechanischen Systems. Zeigen Sie:

Die Linearisierung dieses Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage $q = q_0$ entspricht dem folgenden: die kinetische Energie wird durch $T = \frac{1}{2}T_{ij}(q_0)\dot{q}_i\dot{q}_j$ ersetzt und die potentielle Energie durch $V = \frac{1}{2}V_{ij}(q_0)q_iq_j$.

Bestimmen Sie die Matrizen mit Komponenten T_{ij} und V_{ij}.

Wie sieht also die Wirkung eines mechanischen Systems in der Nähe der Gleichgewichtslage q_0 aus? Was bedeutet dies für die Relevanz des harmonischen Oszillators?

QMI8.4: (6 Punkte) Diese Aufgabe soll das Konzept des quantenmechanischen Zustands im Hilbertraum vom klassischen Trajektorienbegriff abgrenzen und seine Notwendigkeit verdeutlichen.

(a) Berechnen Sie zunächst die Heisenberg-Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt}\hat{p}^{(H)}(t)$ und $\frac{d}{dt}\hat{x}^{(H)}(t)$ für einen harmonischen Oszillator $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\alpha\hat{x}^2$.

(b) Lösen Sie die Heisenberg-Bewegungsgleichungen. Bedenken Sie, dass es sich um eine Operatorgleichung handelt, und implementieren Sie Anfangsbedingungen, die mit den Heisenberggleichungen konsistent sind.

(c) Die Lösung der Heisenberggleichungen entspricht formal der Trajektorie der klassischen Bewegungsgleichungen. Erläutern Sie anhand der Evolution eines Ortseigenzustandes wieso sich das quantenmechanische System dennoch grundlegend verschieden verhält.

(d) Aus welchen fundamentalen quantenmechanischen Prinzipien geht die Notwendigkeit hervor, den Trajektorienbegriff in der Quantenmechanik aufzugeben?

QMI8.5: (7 Punkte) Betrachten Sie das eindimensionale Problem eines Potentialtopfs mit endlicher Tiefe: $V(x) = 0$ für $x > \frac{a}{2}$ und $x < -\frac{a}{2}$, $V(x) = -V_0$ für $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$.

(a) Lösen Sie die Energie-Eigenwertgleichung $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ für $-V_0 < E < 0$ in allen drei Raumbereichen. Berücksichtigen Sie, dass die Lösung normierbar sein muss.

(b) Welche Anschlussbedingungen muss die Lösung an den Stellen $x = -\frac{a}{2}$ und $x = \frac{a}{2}$ erfüllen?

(c) Nutzen Sie die Anschlussbedingungen, um eine Bestimmungsgleichung für die Energieniveaus abzuleiten.

(d) Lösen Sie die Bestimmungsgleichung graphisch. Beachten Sie, dass es zwei verschiedene Lösungsäste gibt. Durch welche Eigenschaft der Wellenfunktion lassen sich die beiden Lösungsäste klassifizieren?

Referatvorschlag: WKB Näherung (30 Punkte)